Etapa 2, Problema 2

Dacă z este un număr complex de modul 1, arătaţi că

$$\sqrt{3} \le |1+z| + |1-z+z^2| \le \frac{13}{4}.$$

Când se realizează egalităţile?

Concursul "Alexandru Myller", 2010

Soluţie.

Dacă $t = |1+z|$, atunci $t \in [0,2]$ şi $t^2 = |1+z|^2 = (1+z)(1+\bar{z}) = 2+z+\bar{z}$, deci $z+\bar{z} = t^2-2$. Rezultă că $|1-z+z^2|^2 = (1-z+z^2)(1-\bar{z}+\bar{z}^2) = 3-2(z+\bar{z})+z^2+\bar{z}^2 = (t^2-3)^2$. Astfel, inegalitatea de demonstrat se rescrie sub forma

$$(*) \qquad \sqrt{3} \le t + |t^2-3| \le \frac{13}{4},\ t \in [0,2].$$

Dacă

$$f(t) = t + |t^2-3| = \begin{cases} -t^2+t+3, & t \in [0,\sqrt{3}] \\ t^2+t-3, & t \in (\sqrt{3},2] \end{cases},$$

atunci variaţia funcţiei f este următoarea:

t	0		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{3}$		2
$f(t)$	3	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	3

Egalitatea din stânga se realizează când $t = \sqrt{3}$, deci pentru $z = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, iar cea din dreapta când $t = \frac{1}{2}$, deci pentru $z = -\frac{7}{8} \pm i\frac{\sqrt{15}}{8}$.

Soluţie alternativă.

Fie $z = a+bi$, cu $a,b \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2 = 1$. Atunci $|1+z|^2 = (a+1)^2+b^2 = 2a+2$, iar $|1-z+z^2|^2 = (1-a+a^2-b^2)^2+(2ab-b)^2 = (2a^2-a)^2+(2a-1)^2(1-a^2) = (2a-1)^2$.

Inegalitatea de demonstrat devine

$$\sqrt{3} \le \sqrt{2a+2} + |2a-1| \le \frac{13}{4},\ a \in [-1,1],$$

care, cu notaţia $t = \sqrt{2a+2} \in [0,2]$, este tocmai inegalitatea (*).

Soluţie alternativă.

Fie $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi \in [0,2\pi)$. Atunci $|1+z|^2 = (1+cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi = 4\cos^2\frac{\varphi}{2}$, iar $|1-z+z^2|^2 = (1-\cos\varphi+\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)^2 +$

$(2\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi)^2 = (2\cos^2\varphi - \cos\varphi)^2 + (2\cos\varphi - 1)^2\sin^2\varphi = (2\cos\varphi - 1)^2 = \left(4\cos^2\frac{\varphi}{2} - 3\right)^2$.

Inegalitatea de demonstrat devine $\sqrt{3} \leq 2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| + \left|4\cos^2\frac{\varphi}{2} - 3\right| \leq \frac{13}{4}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, care, cu notaţia $t = 2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| \in [0, 2]$, este tocmai inegalitatea (*).