Problema 4. Determinați toate funcțiile $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ cu proprietatea că $f(1)=2$ și

$$f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1, \qquad (1)$$

pentru orice $x,y\in\mathbb{Q}$.

***

Soluție:

Din (1), pentru $x=0$ și $y=1$, obținem $f(0)=f(0)f(1)-f(1)+1$. Cum $f(1)=2$, rezultă $f(0)=1$.

Din (1), pentru $y=1$, obținem $f(x+1)=f(x)+1$, pentru orice $x\in\mathbb{Q}$. $\quad(2)$

Prin inducție obținem $f(x+n)=f(x)+n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$ și orice $x\in\mathbb{Q}$. $\quad(3)$

Din (3), pentru $x=0$, obținem $f(n)=n+1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$. $\quad(4)$

Din (1), pentru $x=n\in\mathbb{N}^*$ și $y=\frac{1}{n}$, obținem $f(1)=f(n)f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(n+\frac{1}{n}\right)+1$.

Din (3) și (4) avem $f\left(\frac{1}{n}+n\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)+n$, $f(n)=n+1$ și egalitatea precedentă devine

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}+1,\text{ pentru orice } n\in\mathbb{N}^*. \qquad (5)$$

Pentru orice $m,n\in\mathbb{N}^*$ avem $f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(m\cdot\frac{1}{n}\right)=f(m)f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(m+\frac{1}{n}\right)+1$. Ținând cont de relațiile (3), (4) și (5), rezultă $f\left(\frac{m}{n}\right)=(m+1)\left(\frac{1}{n}+1\right)-\left(m+\frac{1}{n}+1\right)+1=\frac{m}{n}+1$.

Așadar, pentru orice $x\in\mathbb{Q}$, $x\geq 0$, avem $f(x)=x+1$.

Din (2), pentru $x=r-1$, $r\in\mathbb{Q}$, obținem $f(r-1)=f(r)-1$, pentru orice $r\in\mathbb{Q}$. (6)

Cum $f(0)=1$, din relația (6), pentru $r=0$, obținem $f(-1)=0$.

Din (1), pentru $x=r\in\mathbb{Q}$, $r>0$ și $y=-1$, rezultă $f(-r)=f(r)f(-1)-f(r-1)+1$, adică $f(-r)=f(r)\cdot 0-(f(r)-1)+1=0-(r+1-1)+1=-r+1$. De aici deducem că, pentru orice $x\in\mathbb{Q}$, $x<0$, avem $f(x)=x+1$.

În concluzie, $f(x)=x+1$, pentru orice $x\in\mathbb{Q}$.