

Problema 1. Helen împarte numărul 365 la fiecare din numerele $1, 2, \dots, 365$ și întocmește lista celor 365 de resturi obținute.

Apoi Phil împarte numărul 366 la fiecare din numerele $1, 2, \dots, 366$ și întocmește lista celor 366 de resturi obținute.

Care din cei doi are suma resturilor de pe lista sa mai mare și cu cât?

Olimpiadă Marea Britanie, 2017-2018

Soluție:

Dacă, împărțindu-l pe 365 la un număr natural nenul k , Helen a obținut câtul c_k și restul r_k , adică $365 = k \cdot c_k + r_k$, cu $0 \leq r_k < k$, să vedem ce rest obține Phil când îl împarte pe 366 la k . Sunt posibile două situații: dacă $r_k + 1 < k$, atunci $366 = k \cdot c_k + (r_k + 1)$ și restul obținut de Phil este cu 1 mai mare decât cel obținut de Helen. A doua situație este cea în care $r_k = k - 1$. În această situație, $366 = k \cdot c_k + k = k(c_k + 1)$, deci restul obținut de Phil este 0.

Această a doua situație se întâlnește atunci când k divide 366 (și numai atunci). Cum $366 = 2 \cdot 3 \cdot 61$ are 8 divizori, pentru fiecare din numerele $k \in \{1, 2, \dots, 365\} \setminus \{1, 2, 3, 6, 61, 122, 183\}$ (358 de numere) restul obținut de Phil la împărțirea cu k va fi cu 1 mai mare decât cel obținut de Helen, în vreme ce pentru numerele 1, 2, 3, 6, 61, 122 și 183, Helen obține resturile 0, 1, 2, 5, 60, 121, respectiv 182, iar Phil, de fiecare dată, restul 0. În plus, Phil mai obține și un rest 0 la împărțirea cu 366, dar acest rest nu va afecta suma.

În concluzie, diferența dintre suma resturilor obținute de Helen și suma resturilor obținute de Phil este $0 + 1 + 2 + 5 + 60 + 121 + 182 - 358 = 13$, așadar suma resturilor obținute de Helen este cu 13 mai mare decât cea a resturilor obținute de Phil.