Problema 3. Fie ABC un triunghi echilateral şi H un punct arbitrar al segmentului (BC), diferit de mijlocul acestuia. Notăm cu E acel punct al semidreptei $[AB$ care satisface condiţiile $BE = BH$, $B \in (AE)$ şi cu F acel punct al semidreptei $[AC$ care satisface condiţiile $CF = CH$, $C \in (AF)$. Arătaţi că dreapta BC este dreapta lui Euler a triunghiului AEF.

Mihai Miculiţa

Soluţie:
Fie M mijlocul lui (BC) şi O simetricul lui H faţă de M. Vom demonstra că H este ortocentrul, iar O centrul cercului circumscris triunghiului AEF. Va rezulta că dreapta HO, adică BC, este dreapta lui Euler a triunghiului AEF.
• H este ortocentrul ΔAEF.
Triunghiurile BEH şi CFH sunt isoscele, cu măsura unghiului din vârf de $120°$, deci $m(\sphericalangle BEH = 30°)$, ceea ce implică $EH \perp AF$ şi analog $FH \perp AE$, deci H este ortocentrul $\Delta\, AEF$.
• O este centrul cercului circumscris ΔAEF.
Avem $EB = EH = CO$ şi $BO = CH = CF$, deci triunghiurile EBO şi OCF sunt congruente (L.U.L.), prin urmare $OE = OF$, adică punctul O se găseşte pe mediatoarea laturii $[EF]$. Dacă notăm cu O' centrul cercului circumscris triunghiului AEF, se ştie că $m(\sphericalangle EAO') = m(\sphericalangle FAH) = 90° - m(\sphericalangle AFE)$ (într-un triunghi, semidreptele $(AH$ şi $(AO'$ sunt izogonale faţă de laturile triunghiului). Dar şi $\sphericalangle EAO \equiv \sphericalangle FAH$ (din construcţie, triunghiurile ABO şi ACH fiind congruente). Aşadar, O' aparţine atât semidreptei $(AO$ cât şi mediatoarei lui $[EF]$. Cum AO nu este perpendiculară pe EF, aceste două drepte se intersectează într-un singur punct. Ori punctul O se află pe ambele drepte, deci $O' = O$.