Clasa a X-a - Etapa 7 - Problema 3

Enunţ. *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$ *şi* $A \subset \mathbb{C}$ *o mulţime cu* $2n+1$ *elemente. Demonstraţi că există* $B \subset A$ *cu* n *elemente astfel încât*

$$\left|\sum_{z\in B} z\right| \leq \left|\sum_{z\in A\setminus B} z\right|.$$

Soluţie. Raţionăm prin reducere la absurd. Fie $\mathcal{M} = \{B \,|B \subset A,\ \mathrm{Card}\,(B) = n\ \}$. Evident $\mathcal{M}$ are C_{2n-1}^{n} elemente. Atunci avem $\left|\sum_{z\in B} z\right| > \left|\sum_{z\in A\setminus B} z\right|$, pentru orice $B \in \mathcal{M}$. Prin ridicare la pătrat obţinem $\left|\sum_{z\in B} z\right|^2 > \left|\sum_{z\in A\setminus B} z\right|^2$, adică

$$\sum_{z\in B} |z|^2 + \sum_{z,w\in B, y\neq w} z\overline{w} > \sum_{z\in A\setminus B} |z|^2 + \sum_{z,w\in A\setminus B, y\neq w} z\overline{w}.$$

Adunăm toate cele C_{2n+1}^{n} relaţii de tipul celei anterioare şi obţinem

$$\sum_{z\in B} C_{2n+1}^{\,n-1} |z|^2 + \sum_{z,w\in B, y\neq w} C_{2n+1}^{n-2} z\overline{w} > \sum_{z\in A\setminus B} C_{2n+1}^{\,n} |z|^2 + \sum_{z,w\in A\setminus B, y\neq w} C_{2n+1}^{n-1} z\overline{w}.$$

Efectuând toate simplificările obţinem

$$0 > \sum_{z\in A} |z|^2 + \sum_{z,w\in A, y\neq w} z\overline{w},$$

adică $\left|\sum_{z\in A} z\right|^2 < 0$, ceea ce este fals. ■