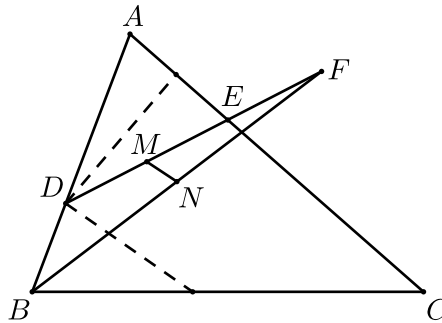


Problema 4. Fie triunghiul ABC și punctele $D \in (AB)$, $E \in (AC)$. Considerăm punctul F astfel încât $E \in (DF)$ și $DB = EF$. Notăm cu M și N mijloacele segmentelor $[DE]$, respectiv $[BF]$. Arătați că dreapta MN este perpendiculară pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADE$.

Soluție.



Deoarece M și N sunt mijloacele segmentelor $[DE]$, respectiv $[BF]$, rezultă $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = \vec{0}$ și $\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{FN} = \vec{0}$. Avem succesiv:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FN} \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EF}.$$

Cum $|\overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{EF}|$, rezultă că \overrightarrow{MN} este paralel cu bisectoarea $\sphericalangle BDF$, deci perpendicular pe bisectoarea unghiului exterior $\sphericalangle ADF$.