Clasa a X-a - Etapa 2

Problema 3. *Se consideră numerele* $a, b, c, d \in (0,1) \cup (1, \infty)$. *Notăm* $x = \log_a bcd$, $y = \log_b acd$, $z = \log_c abd$, $t = \log_d abc$. *Arătaţi că*

$$\sqrt{3(x+y+z+t)+12} \geq \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{t}.$$

Soluţie. Avem

$$\begin{aligned}
\sum \frac{1}{x+1} &= \sum \frac{\log_a a}{\log_a bcd + \log_a a} \\
&= \sum \frac{\log a}{\log_a abcd} \\
&= \sum \log_{abcd} a \\
&= 1,
\end{aligned}$$

de unde obţinem

$$\begin{aligned}
\sum \frac{x}{x+1} &= \sum \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} \right) \\
&= 4 - 1 = 3
\end{aligned}$$

Mai departe vom putea scrie

$$\begin{aligned}
3(x+y+z+t)+12 &= 3 \sum (x+1) \\
&= \left(\sum (x+1) \right) \left(\sum \frac{x}{x+1} \right).
\end{aligned}$$

Din inegalitatea lui Cauchy

$$\left(\sum (x+1) \right) \left(\sum \frac{x}{x+1} \right) \geq \left(\sum \sqrt{x} \right)^2,$$

de unde concluzia dorită.