Problema 4. La o conferință se află $12n$ matematicieni. Fiecare dintre ei cunoaște exact alți $3n+6$ matematicieni și pentru oricare doi, numărul cunoscuților comuni este același. Să se determine numărul de persoane prezente la conferință.

* * *

Soluție.

Pentru oricare doi oameni fie k numărul exact de persoane care sunt cunoscuți cu amândoi. Fie o persoană a și fie B mulțimea cunoscuților lui a, iar C mulțimea tuturor celorlalți. Atunci sunt $3n+6$ elemente în B și $9n-7$ elemente în C.

Pentru orice $b \in B$, mulțimea celor care sunt cunoscuți și lui a și lui b este o submulțime a lui B, deci b cunoaște k persoane în B și încă $3n+5-k$ persoane în C.

Pentru orice $c \in C$, cei care îi cunosc pe a și c se află tot în B, deci c are k cunoștințe în B. Numărul total de cunoștințe între B și C este așadar de

$$(3n+6)(3n+5-k) = (9n-7)k \quad \Leftrightarrow \quad 9n^2 - 12kn + 33n + k + 30 = 0.$$

Rezultă $k = 3m$, $m \in \mathbb{N}^*$ și atunci $m = \dfrac{3n^2+11n+10}{12n-1}$, iar de aici obținem

$$4m = n + 3 + \frac{9n+43}{12n-1}.$$

Deducem că $12n-1$ divide $9n+43$. Pentru $n \geq 15$ avem $12n-1 > 9n+43$, iar pentru $n \leq 14$ condiția $12n-1 \mid 9n+43$ conduce imediat la $n=3$.

În concluzie sunt 36 de matematicieni la conferință.