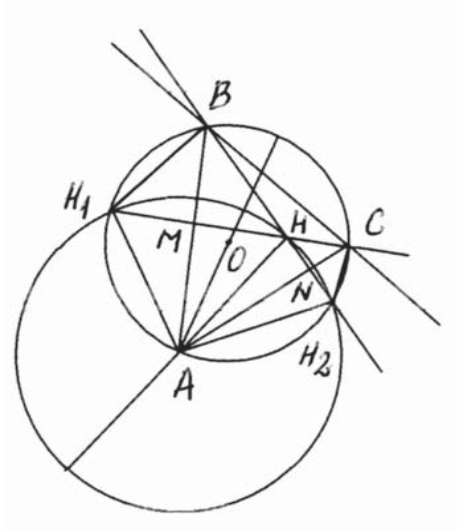
Problema 4. Să se construiască un triunghi ABC, cunoscând vârful A, centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC şi ortocentrul H al triunghiului ABC.

Niţă Cristi

Demonstraţie



Construim cercul $\mathcal{C}_1(O, r_1 = [OA])$ şi cercul $\mathcal{C}_2(A, r_2 = [AH])$.

Fie $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{H_1, H_2\} : [AH_1] \equiv [AH] \equiv [AH_2]$.

Înălţimea dusă din A pe H_1H va intersecta cercul $\mathcal{C}_1$ în punctul $\{B\}$, iar înălţimea dusă din A pe H_2H va intersecta cercul $\mathcal{C}_1$ în punctul $\{C\}$. Cum ΔAHH_1 şi ΔAHH_2 sunt isoscele, rezultă că AB şi AC sunt mediatoare ale segmentelor $[H_1H]$, respectiv $[H_2H]$.

Vom demonstra că tripletele de puncte (B, H, H_2) şi (C, H, H_1) sunt coliniare, rezultând astfel că H reprezintă ortocentrul în ΔABC:

Unim H_1 cu H_2. Avem

$$\widehat{H_1H_2A} \equiv \widehat{H_1BA} \equiv \widehat{HBA} \tag{1}$$

şi

$$\widehat{H_2H_1A} \equiv \widehat{H_2CA} \equiv \widehat{HCA}. \qquad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) obţinem $\widehat{HBA} \equiv \widehat{HCA}$ *(3).*

Fie $\{M\} = BA \cap H_1H$ *şi* $\{N\} = CA \cap H_2H$.

În ΔBMH *şi* ΔCNH *avem:* $\widehat{BMH} \equiv \widehat{CNH} = 90^\circ$ *şi* $\widehat{MBH} \overset{(3)}{\equiv} \widehat{NCH}$. *Rezultă că* $\widehat{MHB} \equiv \widehat{CHN}$. *În plus,*

$$\widehat{MHB} \equiv \widehat{CHN} = \frac{\widehat{H_1AH_2}}{2} \Rightarrow \widehat{MHB} \equiv \widehat{CHN} \equiv \widehat{MAN}. \qquad (4)$$

Cum $\widehat{MBH} + \widehat{MHB} = 90^\circ \overset{(4)}{\Rightarrow} \widehat{MBH} + \widehat{MAN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MBH} + \widehat{BAN} = 90^\circ \Rightarrow BH \perp AC \Rightarrow$ *punctele* B, H, N *sunt coliniare, de unde rezultă că punctele* B, H, H_2 *sunt coliniare.*

Cum $\widehat{NCH} + \widehat{CHN} = 90^\circ \overset{(4)}{\Rightarrow} \widehat{NCH} + \widehat{NAM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{NCH} + \widehat{CAM} = 90^\circ \Rightarrow CH \perp AB \Rightarrow$ *punctele* C, H, M *sunt coliniare, de unde rezultă că punctele* C, H, H_1 *sunt coliniare.*

Rezultă astfel că B şi C sunt celelalte două vârfuri ale ΔABC, având ortocentrul H dat.

■