Se consideră numerele naturale nenule a, b şi n, cu $(a,n)=1$. Calculaţi

$$S_n = \left\{\frac{a+b}{n}\right\} + \left\{\frac{2a+b}{n}\right\} + \left\{\frac{3a+b}{n}\right\} + \cdots + \left\{\frac{na+b}{n}\right\},$$

unde $\{x\}$ desemnează partea fracţionară a numărului real x.

* * *[1]

Soluţie.
Folosind teorema împărţirii cu rest, avem că, pentru orice $k \in \{1,2,3,\dots,n\} \stackrel{\text{not}}{=} A$, există q_k, $r_k \in \mathbb{N}$, cu $0 \le r_k < n$, astfel încât $ka+b = n \cdot q_k + r_k$.

Presupunând, prin reducere la absurd, că există k, $j \in A$, $k \neq j$, astfel încât $r+k = r_j$, am ajunge la $ka+b-n\cdot q_k = ja+b-n\cdot q_j$, adică la $a(k-j) = n(q_k-q_j)$. Ar rezulta atunci că $n \mid a(k-j)$, iar cum $(a,n)=1$, am obţine că $n \mid k-j$, ceea ce este imposibil cu $k, j \in \{1,2,3,\dots,n\}$ cu $k \neq j$.

Rezultă aşadar că numerele $ka+b$, $k \in \{1,2,3,\dots,n\}$, dau resturi distincte două câte două la împărţirea la n, adică $\{r_1, r_2, \dots, r_n\} = \{0,1,2,\dots,n-1\}$.
Avem atunci că

$$S_n = \frac{r_1}{n} + \frac{r_2}{n} + \cdots + \frac{r_n}{n} = \frac{0}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n} = \frac{(n-1)n}{2n} = \frac{n-1}{2}.$$

[1] preluată din cartea Gheorghe Andrei, Ion Cucurezeanu, Constantin Caragea – *Probleme de algebră, Funcţiile parte întreagă şi parte fracţionară*, Editura Gil, 1996