Etapa 2, Problema 3
Fie a, b, c numere reale pozitive cu suma 1. Demonstraţi că

$$\log_a\left(a^2+b^2+c^2\right)+\log_b\left(a^2+b^2+c^2\right)+\log_c\left(a^2+b^2+c^2\right)\le$$

$$\le a\log_a abc+b\log_b abc+c\log_c abc.$$

Gabriel Popa, Concursul Al. Myller, 2005

Soluţie (**Ştefana Şerban**, Reghin, **Oana Ciocioman**, Timişoara şi **Horia Minea**, Iaşi)**.**

Aplicând inegalitatea lui Jensen funcţiei convexe $\log_a:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ (baza este subunitatră) şi ţinând seama de faptul că $a+b+c=1$, obţinem

$$\log_a(a\cdot a+b\cdot b+c\cdot c)\le a\log_a a+b\log_a b+c\log_a c.$$

Din inegalitatea rearanjărilor, avem că

$$a\log_b a+b\log_a b\le a\log_a b+b\log_b a$$

şi încă două relaţii similare. Atunci

$$\sum\log_a\left(a^2+b^2+c^2\right)\le\sum a(\log_a a+\log_a b+\log_a c)=\sum a\log_a abc,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Soluţie alternativă (dată, în diverse variante, de majoritatea concurenţilor care au abordat problema)**.**

Bazele fiind subunitare, funcţiile logaritmice din problemă sunt strict descrescătoare. Rezultă că tripletele (a,b,c) şi $(\log_a abc,\log_b abc,\log_c abc)$ sunt la fel ordonate, deci, conform inegalităţii lui Cebîşev, obţinem că

$$a\log_a abc+b\log_b abc+c\log_c abc\ge$$

$$\ge\frac{1}{3}(a+b+c)\left(\log_a abc+\log_b abc+\log_c abc\right). \qquad (*)$$

Pe de altă parte,

$$a^2+b^2+c^2\ge(a+b+c)\,\frac{a+b+c}{3}\ge 1\cdot\sqrt[3]{abc},$$

de unde $\log_a\left(a^2+b^2+c^2\right)\le\frac{1}{3}\log_a abc$. Revenind în (*) şi ţinând seama de faptul că $a+b+c=1$, rezultă inegalitatea din enunţ.