COMENTARII OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2012
TESTE DE SELECŢIE JUNIORI

Abstract. Comments on some of the problems given at the Selection Tests after the National Mathematics Olympiad 2012.

Data: 29 mai 2012.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. Introducere

Această prezentare, însoţită de comentarii asupra Testelor de Selecţie de după Faza Naţională a Olimpiadei de Matematică este, din nou, după cum v-am obişnuit, opinia personală a autorului.[1]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile personale.

2. Juniori – Test 1

Subiectul (1)**.** *Fie numerele reale pozitive p şi q astfel încât $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Arătaţi că*

a) $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{p(p+1)} + \dfrac{1}{q(q+1)} < \dfrac{1}{2}$.

b) $\dfrac{1}{p(p-1)} + \dfrac{1}{q(q-1)} \geq 1$.

Soluţie. Relaţia dată se scrie $p + q = pq$, şi notând valoarea comună cu v, cum p şi q sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - vx + v = 0$, de discriminant $\Delta = v^2 - 4v$, rezultă $v \geq 4$. Ambele expresii considerate sunt simetrice, deci se pot exprima în termeni de v, şi conduc imediat la inegalităţile dorite. Cazurile de egalitate se obţin pentru $p = q = \dfrac{1}{2}$, iar valoarea $\dfrac{1}{2}$ de la punctul a) este apropiată asimptotic, de exemplu pentru $p \to 1$ şi $q \to \pm\infty$. $\square$

Subiectul (2)**.** *Fie x şi y două numere raţionale, şi n un număr natural impar. Ştiind că $x^n - 2x = y^n - 2y$, arătaţi că $x = y$.*

Mulţumirile mele sincere celor cu care am dialogat cu privire la problemele propuse şi la efectele dorite, discuţii care au condus la materialul de faţă.

[1] Consultaţi soluţiile oficiale ale testului 1 la `http://onm2012.isjcta.ro/subiecte.php`.

Soluţie. Cazul $n = 1$ este trivial. Pentru $n \geq 3$, presupunând $x \neq y$ am avea $x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1} = 2$, dar din considerente de paritate acest lucru este imposibil. $\square$

Subiectul (4)**.** *100 de greutăţi cu mase diferite, exprimate prin numere naturale de la 1 la 100, se aşeează pe talerele unei balanţe, astfel încât balanţa se află în echilibru. Arătaţi că se pot îndepărta câte două greutăţi de pe fiecare taler, astfel încât balanţa să rămână în echilibru.*

Soluţie. Notăm cu A, respectiv B, mulţimea numerelor naturale care reprezintă masele greutăţilor aşezate pe cele două talere. Presupunem că $1 \in A$.

A	1	$\cdots$	a		?		$b+1$	?
B				$a+1$	?	b		?

Dacă există $a, b \in \{1, 2, \ldots, 99\}$ cu $b - a \geq 2$, ca mai sus, atunci avem $a + (b+1) = (a+1) + b$ şi problema e rezolvată. În caz contrar, distribuţia elementelor din A şi B respectă una din următoarele configuraţii [2]

A	1	$\cdots$	a					
B				$a+1$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	100
A	1	$\cdots$	a		$a+2$	$\cdots$	$\cdots$	100
B				$a+1$				
A	1	$\cdots$	a		$a+2$			
B				$a+1$		$a+3$	$\cdots$	100

Pentru primul caz, avem nevoie de $a(a+1) = (1+2+\cdots+100)/2 = 5050$, fără soluţie întreagă. Cazul al doilea este evident imposibil. Pentru al treilea caz, avem nevoie de $(a+1)(a+2) = (1+2+\cdots+100)/2 - 2 = 5048$, fără soluţie întreagă. $\square$

3. Juniori – Test 2

Subiectul (1)**.** *Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale cu proprietatea*

$$a_1 = a_n = a \text{ şi } a_{k+1} \leq \frac{a_k + a_{k+2}}{2} \text{ pentru orice } k = 1, 2, \ldots, n-2.$$

Demonstraţi că $a_k \leq a$ pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$.

Soluţie. Fie $2 \leq m \leq n-1$ cel mai mic index pentru care am avea $a_m > a$, deci $a_m > a \geq a_{m-1}$. Atunci $a_{m+1} \geq 2a_m - a_{m-1} = a_m + (a_m - a_{m-1}) > a_m$. Prin urmare (prin simplă inducţie) şirul $(a_k)_{k \geq m}$ este strict crescător, deci $a_n > a_m > a$, absurd. $\square$

[2] Soluţia oficială omite o ultimă configuraţie posibilă, anume (cu $1 \leq a \leq b - 3 \leq 96$)

A	1	$\cdots$	a		$a+2$	$\cdots$	b			
B				$a+1$				$b+1$	$\cdots$	100

unde însă $(a+2) + b = (a+1) + (b+1)$, şi totul este în ordine.

Remarcă. Un astfel de şir $(a_k)_{k\geq 1}$ se numeşte *convex*; la fel ca mai sus se arată că este constant sau *unimodal* (scade pentru un număr nenul de indici, apoi devine poate constant pentru un număr de indici, apoi creşte înapoi pentru un număr nenul de indici). Un rezultat banal şi arhi-cunoscut.

Subiectul (2)**.** *Dintr-un pătrat $n \times n$ se elimină acele pătrăţele unitate pentru care numărul liniei şi numărul coloanei sunt ambele impare. Aflaţi numărul minim de dale dreptunghiulare de forma $k \times 1$ sau $1 \times k$, unde $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, necesar pentru a cu care se poate pava suprafaţa rămasă.*

Soluţie. Susţinem că numărul minim de dale, notat cu x_n, este m^2-1 pentru $n = 2m - 1$ şi $m^2 + 1$ pentru $n = 2m$. Colorăm pătratul ca o tablă de şah, cu pătrăţelele unitate eliminate fiind de culoare neagră.

Soluţia 1. Pentru $n = 2m-1$ impar, $m \geq 1$, sunt eliminate m^2 pătrăţele, $2m(m-1)$ dintre cele rămase sunt albe, şi $(m-1)^2$ dintre cele rămase sunt negre. Diferenţa dintre cele albe şi cele negre este $2m(m-1) - (m-1)^2 = m^2 - 1$, şi cum o dală, de orice dimensiuni, acoperă cel mult un pătrăţel alb în plus faţă de cele negre, avem nevoie deci de cel puţin $m^2 - 1$ dale.

Pentru $n = 2m$ par, $m \geq 1$, sunt eliminate m^2 pătrăţele, $2m^2$ dintre cele rămase sunt albe, şi m^2 dintre cele rămase sunt negre. Diferenţa dintre cele albe şi cele negre este $2m^2 - m^2 = m^2$, şi cum o dală, de orice dimensiuni, acoperă cel mult un pătrăţel alb în plus faţă de cele negre, avem nevoie deci de cel puţin m^2 dale. Dar cum pătrăţelul (n, n) este negru, dala care îl acoperă nu poate conţine un pătrăţel alb în plus faţă de cele negre, deci avem nevoie de cel puţin $m^2 + 1$ dale.

Soluţia 2. Acoperim ceea ce rămâne din tablă cu dale de dimensiune maximă $n \times 1$ şi $1 \times n$. Ele se suprapun câte două peste fiecare dintre pătrăţelele negre rămase, şi numai peste ele.

Pentru $n = 2m-1$ impar, $m \geq 1$, acest număr este $(m-1)^2$, iar numărul de dale este $2(m - 1)$. Fiecare dintre pătrăţelele de suprapunere trebuie eliminat, din cel puţin una dintre dalele care îl conţin, dar acest lucru sparge dala respectivă în două, deci numărul de dale creşte cu cel puţin 1. Prin urmare, numărul final de dale este cel puţin $2(m-1)+(m-1)^2 = m^2-1$.

Pentru $n = 2m$ par, $m \geq 1$, acest număr este m^2, iar numărul de dale este $2m$. Fiecare dintre pătrăţelele de suprapunere trebuie eliminat, din cel puţin una dintre dalele care îl conţin. Pentru cele $2m-1$ pătrăţele negre aflate pe marginea tablei acest lucru nu sporeşte numărul de dale, dar pentru celelalte $m^2 - (2m - 1)$ acest lucru sparge dala respectivă în două, deci numărul de dale creşte cu cel puţin 1. Prin urmare, numărul final de dale este cel puţin $2m + (m^2 - (2m - 1)) = m^2 + 1$.

Soluţia 3. O soluţie prin inducţie poate fi şi ea considerată. Trecerea de la $2m - 1$ la $2m$ necesită cel puţin 2 dale noi, deci $x_{2m} \geq x_{2m-1} + 2$. Trecerea de la $2m$ la $2m+1$ necesită cel puţin $2m-1$ dale noi, prin urmare $x_{2m+1} \geq x_{2m} + (2m - 1)$, dar acest lucru este mai greu de argumentat, şi poate mai uşor este de arătat că $x_{2m+1} \geq x_{2m-1} + (2m + 1)$.

Modelele. Un model poate fi construit inductiv, pornind cu $x_1 = 0$, $x_{2m} = x_{2m-1} + 2$ şi $x_{2m+1} = x_{2m} + (2m-1)$ pentru $m \geq 1$, ceea ce conduce exact la formulele stabilite mai sus $x_{2m-1} = m^2 - 1$ şi $x_{2m} = m^2 + 1$ pentru $m \geq 1$. Figura care urmează arată modul de formare al acoperirilor. $\square$

$*$	V	$*$	V	$*$	V	$*$
H	V	$+$	V	$+$	V	$+$
$*$	V	$*$	V	$*$	V	$*$
H	H	H	V	$+$	V	$+$
$*$	$+$	$*$	V	$*$	V	$*$
H	H	H	H	H	V	$+$
$*$	$+$	$*$	$+$	$*$	V	$*$

Subiectul (3)**.** *Fie m şi n două numere naturale, $m, n \geq 2$. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale nenule ecuaţia*

$$x^n + y^n = 3^m.$$

Soluţie. Fie $d = (x, y)$, $x = da$, $y = db$, $(a, b) = 1$. Atunci $d^n(a^n + b^n) = 3^m$, de unde $d = 3^k$ pentru un număr natural k, şi deci $a^n + b^n = 3^{m-kn}$. Este deci suficient să rezolvăm ecuaţia pentru x, y coprime.

Dacă $n = 2p$ este par, atunci $3 \mid (x^p)^2 + (y^p)^2$ implică $x \equiv y \equiv 0 \pmod 3$, absurd. Prin urmare $n = 2p + 1$ este impar, şi atunci, folosind factorizarea $x^n + y^n = (x+y)(x^{2p} - x^{2p-1}y + \cdots + y^{2p})$, rezultă $x + y = 3^q$ pentru un număr natural nenul q. Dar teorema lui Zsigmondy afirmă că pentru x, y coprime numărul $x^n + y^n$, $n > 1$, are cel puţin un divizor prim primitiv (adică ce nu divide o sumă de puteri mai mici), cu excepţia cazului $2^3 + 1^3 = 3^2$. Aşadar singurele soluţii sunt $\{x, y\} = \{3^k, 2 \cdot 3^k\}$ pentru orice număr natural k, şi pentru $n = 3$, de unde $m = 3k + 2$.

Alternativ, fie $n = 3^r s$ pentru un număr natural r şi $3 \nmid s$. Din lema Lifting the Exponent rezultă că puterea maximă a lui 3 care divide $x^n + y^n$ este $q + r$, deci trebuie să avem $x^n + y^n = 3^{q+r}$, aşadar $x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1} = 3^r$. Putem presupune $x > y$, şi atunci pentru $r \geq 2$ vom avea

$$x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1} > x^{n-2}(x - y) \geq 2^{n-2} \geq 2^{3^r - 2} > 3^r,$$

absurd. Singurul caz rămas posibil este cel descris mai sus, pentru $n = 3$. $\square$

Subiectul (4)**.** *Fie patrulaterul $ABCD$ înscris în cercul Γ de centru O, şi fie $\{P\} = AC \cap BD$, $\{Q\} = AB \cap CD$. Fie şi cercul Γ_U de centru U circumscris triunghiului APB şi cercul Γ_V de centru V circumscris triunghiului CPD. Fie R al doilea punct de intersecţie al cercurilor Γ_U şi Γ_V.*

a) Demonstraţi că punctele P, Q, R sunt coliniare.

b) Demonstraţi că punctele U, R, O, V sunt conciclice.

Soluţie. a) Dreapta $(Q)BA$ este axa radicală a cercurilor Γ şi Γ_U. Dreapta $(Q)CD$ este axa radicală a cercurilor Γ şi Γ_V. Dreapta PR este axa radicală a cercurilor Γ_U şi Γ_V. Cum axele radicale a trei cercuri sunt concurente în centrul radical, punctul Q se află pe dreapta PR.

b) Presupunem $B \in (AQ)$ şi $C \in (DQ)$. Avem $OU \perp AB$ şi $OV \perp CD$, deci $\angle UOV = \pi - \angle AQD = \pi - \dfrac{\operatorname{arc}(AD) - \operatorname{arc}(BC)}{2}$. Pe de altă parte, $\angle BPU = \dfrac{\pi}{2} - \angle BAP = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\operatorname{arc}(BC)}{2}$, $\angle CPV = \dfrac{\pi}{2} - \angle CDP = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\operatorname{arc}(BC)}{2}$, deci $\angle UPV = 2\pi - (\angle BPU + \angle BPC + \angle CPV) = 2\pi - 2\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\operatorname{arc}(BC)}{2}\right) - \dfrac{\operatorname{arc}(AD) + \operatorname{arc}(BC)}{2} = \pi - \dfrac{\operatorname{arc}(AD) - \operatorname{arc}(BC)}{2} = \angle UOV$. Finalmente, din $\angle URV = \angle UPV = \angle UOV$ rezultă conciclicitatea cerută a celor patru puncte U, R, O, V, căci O şi R se află de aceeaşi parte a dreptei UV. $\square$

4. Juniori – Test 3

Subiectul (1)**.** *Fie a, b, c, d numere reale nenule distincte două câte două care satisfac condiţiile $ac = bd$ şi $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{d} + \dfrac{d}{a} = 4$. Determinaţi cea mai mare valoare posibilă a expresiei $\dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{a} + \dfrac{b}{d} + \dfrac{d}{b}$.*

Soluţie. Să notăm $\dfrac{a}{b} = k$ şi $\dfrac{b}{c} = \ell$; cele două condiţii se scriu $a = kb$, $d = kc$, $b = \ell c$, $k + \ell + \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{\ell} = 4$, iar expresia de maximizat $\left(k + \dfrac{1}{k}\right)\left(\ell + \dfrac{1}{\ell}\right)$.

Funcţia $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ are -2 ca maxim local (pentru $x = -1$) şi 2 ca minim local (pentru $x = 1$), căci $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| = |x| + \dfrac{1}{|x|} \geq 2$, cu egalitate pentru $|x| = 1$. Cum $f(k) + f(\ell) = 4$, rezultă că trebuie să avem $kl < 0$; altfel, pentru $k, \ell > 0$, ar trebui să avem $k = \ell = 1$, ceea ce duce la $a = b = c = d$.[3] Dar atunci expresia de maximizat $f(k)f(\ell)$ atinge valoarea maximă $\boxed{-12}$ pentru $\{f(k), f(\ell)\} = \{-2, 6\}$, adică pentru $\{k, \ell\} = \{-1, 3 \pm 2\sqrt{2}\}$. $\square$

Subiectul (2)**.** *Se consideră un semicerc de diametru AB şi centru O. Fie C un punct arbitrar pe segmentul OB. Punctul D de pe semicerc este astfel încât $CD \perp AB$. Un cerc cu centrul P este tangent arcului BD în punctul F, şi este tangent segmentelor AB şi CD în punctele G, respectiv E. Arătaţi că triunghiul ADG este isoscel.*

Soluţie. O problemă metrică mai simplă nici că se putea. Fie $OA = OB = OD = OF = 1$, $OC = x \in [0, 1]$, $CG = PG = PF = y \in [0, 1 - x]$. Avem $OP^2 = (x + y)^2 + y^2 = (OF - PF)^2 = (1 - y)^2$, de unde egalitatea $x^2 + y^2 + 2xy + 2y - 1 = 0$. Pe de altă parte, $CD^2 = 1 - x^2$ şi deci $AD^2 = (1 + x)^2 + 1 - x^2$, iar $AG^2 = (1 + x + y)^2$. Condiţia $AD = AG$ revine atunci exact la $x^2 + y^2 + 2xy + 2y - 1 = 0$ de mai sus. $\square$

[3] Prin urmare era suficient să se fi cerut ca a, b, c, d să nu fie toate egale.

Subiectul (3). *Cel mai mare divizor comun al numerelor întregi nenule a, b, c este 1. O* **mutare** *constă din transformarea unui triplet de numere întregi (x, y, z) prin adunarea la unul din numerele din triplet a unui multiplu întreg al unui alt număr din triplet. Arătaţi că pornind de la tripletul (a, b, c), în cel mult 5 mutări, se poate ajunge la tripletul $(1, 0, 0)$.*

Se poate folosi următorul rezultat

> **Teorema lui Dirichlet**. *Dacă q, r sunt două numere naturale nenule prime între ele atunci mulţimea $\{q + nr \mid n \in \mathbb{N}\}$ conţine o infinitate de numere prime.*

Soluţie. Din Dirichlet, mulţimea $\{b/(a, b) + na/(a, b) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ conţine un număr prim $p = b/(a, b) + na/(a, b) > |c|$. Fie $b' = p(a, b) = b + na$. Facem mutarea $(a, b, c) \mapsto (a, b + na, c)$. Avem evident $(b', c) = 1$, deci din relaţia lui Bézout există $u, v \in \mathbb{Z}$, astfel ca $ub' + vc = 1$. Facem mutările $(a, b', c) \mapsto (a + (1 - a)ub', b', c) \mapsto (a + (1 - a)ub' + (1 - a)vc, b', c)$. Dar $a + (1-a)ub' + (1-a)vc = a + (1-a)(ub' + vc) = a + (1-a) = 1$. Facem acum mutările $(1, b', c) \mapsto (1, b' + (-b')1, c) \mapsto (1, b' + (-b')1, c + (-c)1) = (1, 0, 0)$, şi am obţinut rezultatul cerut în 5 mutări.

În mod absolut asemănător, din orice triplet (a, b, c) de numere întregi nenule se poate ajunge în (cel mult) 5 mutări la tripletul $(d, 0, 0)$, unde d este cel mai mare divizor comun al celor trei numere a, b, c.

Folosirea Teoremei lui Dirichlet poate fi evitată. În notaţiile de mai sus, dacă un număr prim p divide atât c cât şi un $b + n_p a$, atunci $p \nmid a$ (căci altfel $p \mid a$ şi $p \mid b$, absurd). Din Lema Chineză a Resturilor există n astfel încât $n \equiv n_p + 1 \pmod p$ pentru fiecare astfel de p; dar atunci $(c, b + na) = 1$, căci dacă $p \mid c$ şi $p \mid b + na$, cum $p \mid b + n_p a$ avem şi $p \mid (n - n_p)a$, deci $p \mid n - n_p$, imposibil. Faptul că avem doar nevoie ca $b + na$ să fie coprim cu c permite acest lucru. □

Subiectul (4). *Fie mulţimea $A = \{1, 2, \ldots, 2n - 1\}$, unde $n \geq 2$ este un număr natural. Din mulţimea A se elimină cel puţin $n - 1$ elemente, astfel încât*

- *dacă $a \in A$ a fost eliminat şi dacă $2a \in A$, atunci şi $2a$ a fost eliminat;*
- *dacă $a, b \in A$ $(a \neq b)$ au fost eliminate şi dacă $a + b \in A$, atunci şi $a + b$ a fost eliminat.*

Care numere trebuie eliminate pentru ca suma elementelor rămase să fie maximă?

Soluţie. Fie $1 \leq e_1 < e_2 < \cdots < e_m \leq 2n - 1$ numerele eliminate, formând o mulţime E cu $|E| = m \geq n - 1$. Avem $e_i + e_{m-i+1} \geq 2n$ pentru orice $1 \leq i \leq m$, căci numerele distincte $e_i + e_1 < \cdots < e_i + e_{m-i} < e_i + e_{m-i+1}$ sunt $m - i + 1$ la număr, toate mai mari decât e_i, şi nu pot fi toate printre cele $m - i$ numere eliminate mai mari decât e_i, anume $e_{i+1} < \cdots < e_m$, deci numărul $e_i + e_{m-i+1}$, cel mai mare dintre toate, trebuie să satisfacă

$e_i + e_{m-i+1} \geq 2n$. Atunci însă

$$2n(n-1) \leq 2nm = \sum_{i=1}^{m} 2n \leq \sum_{i=1}^{m}(e_i+e_{m-i+1}) = \sum_{i=1}^{m} e_i + \sum_{i=1}^{m} e_{m-i+1} = 2\sum_{e\in E} e$$

şi deci $\displaystyle\sum_{a\in A\setminus E} a = \sum_{k=1}^{2n-1} - \sum_{e\in E} e \leq n(2n-1) - n(n-1) = n^2$. Un model imediat este pentru $E_0 = \{2, 4, \ldots, 2n-2\}$, cu $\displaystyle\sum_{a\in A\setminus E} a = 1+3+\cdots+(2n-1) = n^2$.

Dar acesta este singurul model posibil, căci pentru a avea egalitatea finală avem nevoie de $m = n-1$ şi $e_i + e_{n-i} = 2n$ pentru orice $1 \leq i \leq n-1$. În plus, trebuie ca $e_1 + e_i = e_{i+1}$ pentru orice $1 \leq i \leq n-2$, de unde $e_i = ie_i$ pentru orice $1 \leq i \leq n-1$. Prin urmare $2n - e_1 = e_{n-1} = (n-1)e_1$, deci $e_1 = 2$, ceea ce conduce la modelul E_0. □

5. Juniori – Test 4

Subiectul (1)**.** *Arătaţi că, pentru orice numere reale pozitive a, b, c cu proprietatea că $abc = 1$, are loc inegalitatea*

$$\frac{1}{1+a^2+(b+1)^2} + \frac{1}{1+b^2+(c+1)^2} + \frac{1}{1+c^2+(a+1)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Soluţie. Avem $1+a^2+(b+1)^2 = 2+2b+(a^2+b^2) \geq 2(1+b+ab)$, şi similar celelalte. Atunci membrul stâng este cel mult egal cu

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+b+ab} + \frac{1}{1+c+bc} + \frac{1}{1+a+ca}\right).$$

Dar $c(1+b+ab) = 1+c+bc$ şi $ca(1+b+ab) = 1+a+ca$, deci expresia de mai sus este egală cu

$$\frac{1}{2(1+b+ab)}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{c} + \frac{1}{ca}\right) = \frac{1+a+ca}{2ca(1+b+ab)} = \frac{1}{2}.$$

□

Remarcă. Identitatea finală este una care a apărut, într-o formă ceva mai complicată, în problema 1 de la concursul Stelele Matematicii 2011 (juniori).

Subiectul (2)**.** *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Jumătate dintre vârfurile unui poligon regulat cu $2n$ laturi se colorează cu roşu, iar celelalte cu albastru. Distanţele dintre vârfurile roşii se ordonează crescător, şi apoi se procedează analog şi cu distanţele dintre vârfurile albastre. Demonstraţi că cele două secvenţe coincid.*

Soluţie. Etichetăm vârfurile roşii cu $+1$ şi vârfurile albastre cu -1, şi notăm cu $e(w)$ valoarea etichetei vârfului w. Pentru o pereche de vârfuri $\{u, v\}$ luăm $e(u, v) = e(u) + e(v)$. Pentru orice valoare posibilă ℓ a lungimii unei distanţe dintre două vârfuri ale poligonului, fie $r(\ell)$ numărul perechilor $\{u, v\}$ de vârfuri roşii cu $\mathrm{d}(u, v) = \ell$ şi $a(\ell)$ numărul perechilor $\{u, v\}$ de vârfuri albastre cu $\mathrm{d}(u,v)=\ell$. Avem atunci $\sum_{\mathrm{d}(u,v)=\ell} e(u,v) = 2(r(\ell)-a(\ell))$, dar pe de altă parte $\sum_{\mathrm{d}(u,v)=\ell} e(u,v) = 2\sum e(w) = 0$ dacă ℓ nu este lungimea unui diametru, şi $\sum_{\mathrm{d}(u,v)=\ell} e(u,v) = \sum e(w) = 0$ dacă ℓ este lungimea unui diametru. În ambele cazuri rezultă $r(\ell)=a(\ell)$, ceea ce implică cerinţa problemei. □

Subiectul (3)**.** *Fie $M \in (BC)$, $N \in (CA)$, $P \in (AB)$ picioarele a trei ceviene concurente în triunghiul ABC. Paralela prin N la AB taie PM în E, iar paralela prin M la AB taie PM în F. Arătaţi că dreptele MN, EF şi PC sunt concurente.*

Soluţie. Una dintre soluţiile oficiale foloseşte faptul cunoscut că, într-un trapez, punctul de intersecţie a laturilor neparalele, punctul de intersecţie a diagonalelor, şi mijloacele bazelor sunt puncte coliniare. □

Subiectul (4)**.** *Un număr natural nenul se numeşte* **unicat** *dacă suma inverselor divizorilor săi pozitivi (inclusiv 1 şi el însuşi) nu este egală cu suma inverselor divizorilor pozitivi ai niciunui alt număr natural nenul.*

a) Arătaţi că orice număr prim este unicat.
a) Arătaţi că există o infinitate de numere care nu sunt unicat.

Soluţie. Notaţiile consacrate sunt $\sigma_{-1}(n) = \sum_{d|n} \frac{1}{d}$ şi $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$. Avem

$$\sigma_{-1}(n) = \sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \frac{n}{d} = \frac{1}{n}\sum_{e|n} e = \frac{1}{n}\sigma(n).$$

Deoarece funcţia aritmetică $\sigma(n)$ este multiplicativă, rezultă că şi funcţia $\sigma_{-1}(n)$ este multiplicativă.

a) Pentru p prim avem $\sigma_{-1}(p) = \sum_{d|p} \frac{1}{d} = 1 + \frac{1}{p} = \frac{p+1}{p}$. Dacă am avea $\sigma_{-1}(n) = \sigma_{-1}(p)$, atunci $p\sigma(n) = n(p+1)$, deci $p \mid n$. Dar atunci, dacă $n \neq p$, am avea $\sigma_{-1}(n) = \sum_{d|n} \frac{1}{d} \geq 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{n} > \sigma_{-1}(p)$, absurd.

b) Este cunoscut faptul că pentru un număr *perfect* n (adică $\sigma(n) = 2n$) avem $\sigma_{-1}(n) = \frac{1}{n}\sigma(n) = 2$. Existenţa numerelor perfecte pare este legată de numerele prime Mersenne (de forma 2^p-1, cu p prim), despre care nu se ştie dacă sunt infinit de multe, un număr perfect par fiind de forma $2^{p-1}(2^p-1)$ (iar numere perfecte impare nu se cunosc). Dar cum 6 şi 28 sunt numere perfecte, avem $\sigma_{-1}(6) = \sigma_{-1}(28) = 2$, şi deci 6 şi 28 nu sunt numere unicat. Funcţia $\sigma_{-1}(n)$ fiind multiplicativă, rezultă că pentru orice număr natural

n coprim cu $2 \cdot 3 \cdot 7$ vom avea $\sigma_{-1}(6n) = \sigma_{-1}(28n) = 2\sigma_{-1}(n)$, şi deci $6n$ şi $28n$ nu sunt numere unicat.[4] $\square$

6. Încheiere

Un fenomen negativ, şi care a influenţat întrucâtva rezultatele selecţiei, a fost îngrămădirea a trei teste de câte patru probleme în spaţiul a doar patru zile. Pentru copii de 14-15 ani, este cam mult deodată. De asemenea, numărul de doar patru teste de selecţie (şi deci numărul problemelor cerute) a fost relativ mic, şi poate nu suficient de reprezentativ.

Rezultatele selecţiei pentru echipa de Balcaniadă de Juniori sunt

Andronache Teodor Andrei	VIII
Avădanei Ovidiu	VIII
Ploscaru Ioan Laurenţiu	VIII
Stoienescu Paul Ioan	VII
Vîntu Ioan Vladimir	VIII
Dărăuţă Raluca	VIII

[4]Există şi numere k-perfecte, cu $k \geq 3$, definite prin $\sigma(n) = kn$. Evident, ele pot fi folosite într-un mod absolut similar. De exemplu, numerele 120 şi 672 sunt triperfecte.