Clasa a XI-a - soluții

Problema 1. Fie n un număr natural nenul și A, B două matrice pătrate de ordin n, cu elemente numere complexe, astfel încât $A^2 + B^2 = A^3 + B^3 = I_n$. Arătați că $AB = BA$.

Mihail Bălună, Marius Mâinea

Soluţie. Avem $AB^3 = A - A^3 = B^3A$; analog $A^3B = BA^3$ **3p**

De aici și din ipoteză, $AB = AI_nB = A(A^2 + B^2)B = A^3B + AB^3 = BA^3 + B^3A = B(A^2 + B^2)A = BA$ **4p**

Problema 2. Determinați funcțiile continue și descrescătoare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x) + f(f(x) - x) = x + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Mihai Opincariu, GM 6-7-8/2020

Soluţie. Dacă f este o funcție care verifică condiția din enunț, notând $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$, deducem că $g(g(x)) + 2g(x) = 1$, pentru orice x real **2p**

Deoarece f este descrescătoare, limita sa la $-\infty$ există (finită sau $+\infty$), deci limita lui g la $-\infty$ este $+\infty$. Analog limita lui g la $+\infty$ este $-\infty$. Cum g este continuă, din proprietatea lui Darboux deducem că g este surjectivă.......... **2p**

Așadar pentru orice $y \in \mathbb{R}$ există $x \in \mathbb{R}$ cu $g(x) = y$ deci $g(y) + 2y = 1$, adică $f(y) = 1 - y$, pentru orice $y \in \mathbb{R}$ **2p**

Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 1 - x$ verifică condiția problemei **1p**

Problema 3. Fie $f : \mathbb{R}$ o funcție indefinit derivabilă, cu proprietatea

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

a) Arătați că, dacă $\lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = 0$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

b) Arătați că, dacă $\lim\limits_{x\to\infty} f'''(x) = 0$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = 0$.

***

Soluție. a) Observăm că pentru $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(f(x) - f'(x))\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}$ putem aplica regula lui l'Hopital în cazul $\frac{\bullet}{\infty}$, deorece funcțiile sunt derivabile și

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\big((f(x) - f'(x))\,\mathrm{e}^x\big)'}{\big(\mathrm{e}^x\big)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{(f(x) - f''(x))\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} = 0.$$

Rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - f'(x)) = 0$, de unde concluzia **3p**

b) Ca mai sus, avem $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(f(x) - f'(x) + f''(x))\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) + f'''(x)) = 0$, deci $\lim\limits_{x\to\infty} (f'(x) - f''(x)) = 0 \quad (1)$ **1p**

Apoi $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(3f(x) - 2f'(x) + f''(x))\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} = \lim\limits_{x\to\infty} (3f(x) + f'(x) - f''(x) + f'''(x)) = 0$, deci $\lim\limits_{x\to\infty} (2f'(x) - f''(x)) = 0 \quad (2)$. Din (1) și (2) rezultă concluzia.......... **3p**