Clasa a X-a - Problema 2

Enunţ: *Fie* $a,b,c\in(1,\infty)$. *Demonstraţi că*

$$\log_a^4 b+\log_b^4 c+\log_c^4 a\geq \log_a b+\log_b c+\log_c a.$$

Soluţie. Avem

$$x^4+y^4+z^4\geq x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2\geq x^2yz+xy^2z+xyz^2=xyz(z+y+z),$$

în urma aplicării succesive a inegalităţii $u^2+v^2+w^2\geq uv+uw+vw$, $u,v,w\in\mathbb{R}$.
Acum concluzia se obţine dacă remarcăm egalitatea $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$.