COMENTARII FAZA LOCALĂ 2013, BUCUREŞTI

ABSTRACT. Comments on some of the problems presented at the Local Round of the National Mathematics Olympiad 2013, Bucharest.

Data: 12 februarie 2013.

Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. INTRODUCERE

Aceste comentarii asupra Fazei Locale a Olimpiadei de Matematică 2013, Bucureşti, reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului. Ele sunt adăugate la o prezentare selectată a probelor de concurs.

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

2. CLASA A V-A

Subiectul (4)**.** *Se consideră mulţimile* $A = \{a, b, c, d\} \subset \mathbb{N}$ *şi* $S = \{s \in \mathbb{N} \mid s = x + y,\ x \in A,\ y \in A,\ x \neq y\}$*. Se ştie că* $S = \{82, 96, 104, 112, 126\}$*.*

a) Calculaţi suma elementelor din mulţimea A*;*
b) Determinaţi elementele mulţimii A*.*

Mircea Fianu

Soluţie. O reluare a unei idei extrem de cunoscute. Impunând o ordine $0 \leq a < b < c < d$ între elementele mulţimii A se obţin inegalităţile

$$a + b < a + c < a + d, b + c < b + d < c + d.$$

a) Prin urmare trebuie să avem $a+d = b+c = 104$, deci $a+b+c+d = 208$.

b) Având şi $2a+b+c = (a+b)+(a+c) = 82+96 = 178$, rezultă $a = 37$, şi apoi celelalte. Este clar că unele din valorile din S sunt redundante. $\square$

3. CLASA A VI-A

Subiectul (1)**.** *Determinaţi numerele prime* p *şi* q *ştiind că* $\dfrac{p}{q} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$, *unde* a *şi* b *sunt numere naturale nenule.*

Lucian Petrescu

Soluţie. Vom scrie $\dfrac{p}{q} = \dfrac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2$; putem evident presupune că a şi b sunt relativ prime, şi atunci cele două fracţii sunt ambele scrise în formă redusă, deci trebuie să avem $q = ab$ şi $p = a^2 + b^2$. Prin urmare, trebuie ca $a = 1$

sau $b = 1$ (căci q este număr prim), deci $p = q^2 + 1$. Dar dacă q ar fi impar, ar rezulta $p > 2$ par, absurd, deci trebuie să avem $q = 2$, şi atunci $p = 5$. $\square$

Subiectul (2)**.** *Determinaţi numerele* $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ *şi cifra* b *astfel încât să aibă loc egalitatea* $6^a + 1 = \underbrace{\overline{bb\ldots b}}_{n\ ori}$.

G.M.-B.

Soluţie. În afară de soluţia trivială $6^0+1 = 2$, pentru $a > 0$ ultima cifră a lui $6^a + 1$ este 7, deci trebuie $b = 7$. Dar atunci putem scrie $6^a + 1 = b\dfrac{10^n - 1}{9}$, sau $2^a \cdot 3^{a+2} = 7 \cdot 2^n \cdot 5^n - 2^4$.

Acum, pentru $a > 5$ avem $6^a > 10^5$, deci trebuie $n \geq 5$. Atunci însă $2^a \cdot 3^{a+2}$ şi $7 \cdot 2^n \cdot 5^n$ se divid prin 2^5, ceea ce face egalitatea de mai sus imposibilă. Rămân de examinat cazurile $1 \leq a \leq 5$, ducând la soluţia trivială $6^1 + 1 = 7$, dar şi la soluţia surprinzătoare $6^5 + 1 = 7777$. $\square$

Subiectul (3)**.** *Se consideră numărul natural prim* p. *Numărul natural* n *este divizibil cu* p^3 *dar nu este divizibil cu* p^4. *Numerele* $d_1, d_2, \ldots, d_k$, $k \in \mathbb{N}^*$, *sunt divizorii numărului* n *şi* $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$.

a) Determinaţi cea mai mică valoare posibilă a lui k.
b) Arătaţi că numărul $P = d_1 d_2 \cdots d_k$ *este pătrat perfect.*

Prelucrare *G.M.-B.*

Soluţie. Avem deci $n = p^3 m$, unde p şi m sunt relativ prime. Funcţia aritmetică $\tau(N)$ care reprezintă numărul divizorilor naturali ai lui N este multiplicativă, deci $\tau(n) = \tau(p^3)\tau(m) = 4\tau(m) \geq 4$. Cea mai mică valoare posibilă a lui k este deci 4, pentru $n = p^3$.

Avem $P = \prod\limits_{d|n} d = \prod\limits_{d|n} \dfrac{n}{d}$, deci $P^2 = \left(\prod\limits_{d|n} d\right)\left(\prod\limits_{d|n} \dfrac{n}{d}\right) = n^{\tau(n)} = n^{4\tau(m)}$, de unde $P = \left(n^{\tau(m)}\right)^2$, un pătrat perfect. $\square$

Subiectul (4)**.** *Se consideră numerele naturale nenule* m *şi* n *şi un unghi alungit* $\widehat{A_0OA_{m+n}}$. *De aceeaşi parte a dreptei* A_0A_{m+n} *se consideră, în sensul mişcării acelor de ceasornic, semidreptele* $(OA_1, (OA_2, \ldots, (OA_{m+n-1}$, *care formează unghiurile* $\widehat{A_0OA_1}, \widehat{A_1OA_2}, \ldots, \widehat{A_{m+n-1}OA_{m+n}}$. *Se ştie că un număr de* m *unghiuri dintre cele menţionate au măsura egală cu* 3°, *iar celelalte* n *unghiuri au măsura egală cu* 5°.

a) Determinaţi cea mai mică valoare a sumei $m + n$;
b) Dacă $m = 5$, *arătaţi că există* $i, j \in \{0, 1, 2, \ldots, m+n\}$ *astfel încât* $\mathrm{m}\left(\widehat{A_iOA_j}\right) = 30^\circ$.

Mircea Fianu

Soluţie. Problema nu are de loc aromă geometrică. Este vorba de $m+n$ numere $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}$ cu suma 180, dintre care m au valoarea 3, iar restul de n au valoarea 5, prin urmare $3m+5n=180$, sau $5(m+n)=180+2m$. Dar atunci minimul sumei $m+n$ se obţine când m este minim, şi cum $m>0$ şi $5 \mid m$, acest lucru se obţine pentru $m=5$, când $n=33$.

Punctul b) introduce o idee combinatorică. Deoarece cele 5 valori egale cu 3 determină cel mult şase grupuri de valori cu indici consecutivi egale cu 5, şi cum sunt $33 > 6 \cdot 5$ astfel de valori, din principiul cutiei măcar un astfel de grup conţine cel puţin şase numere, a căror sumă va fi 30. $\square$

Subiectele clasei a VI-a mi s-au părut disproporţionat de grele, prin raportarea la subiectele celorlalte clase.

4. Clasa a VII-a

Subiectul (2). *a) Determinaţi numerele naturale a care au proprietatea că*

$$\left|a-\sqrt{2}\right|+\left|a-2\sqrt{2}\right|+\left|a-3\sqrt{2}\right| \in \mathbb{Q}.$$

b) Demonstraţi că numărul

$$N=\left|a-\sqrt{2}\right|+\left|a-2\sqrt{2}\right|+\left|a-3\sqrt{2}\right|+\cdots+\left|a-2013\sqrt{2}\right|$$

este iraţional pentru orice număr raţional a.

Traian Preda

Soluţie. Fie, mai general,

$$N=\left|a-\sqrt{2}\right|+\left|a-2\sqrt{2}\right|+\cdots+\left|a-n\sqrt{2}\right|$$

pentru $n \geq 2$ natural, şi a raţional.

- Pentru $a<\sqrt{2}$ vom avea $N=-na+\dfrac{n(n+1)}{2}\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
- Pentru $a>n\sqrt{2}$ vom avea $N=na-\dfrac{n(n+1)}{2}\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
- Pentru $m\sqrt{2}<a<(m+1)\sqrt{2}$, cu $1 \leq m \leq n-1$ natural, vom avea $N=(2m-n)a+(n+\cdots+(m+1)-m-\cdots-1)\sqrt{2}$. Coeficientul lui $\sqrt{2}$ este $\dfrac{n(n+1)}{2}-m(m+1)$, şi pentru ca N să fie raţional trebuie ca acest coeficient să fie nul.

a) Pentru $n=3$ funcţionează soluţia $(n,m)=(3,2)$, deci avem nevoie de $2\sqrt{2}<a<3\sqrt{2}$, adică $a \in \{3,4\}$.

b) Pentru $n=2013$, coeficientul lui $\sqrt{2}$ este $\dfrac{n(n+1)}{2}-m(m+1)=2013 \cdot 1007-m(m+1) \neq 0$, căci este număr natural impar.

De fapt, condiţia se scrie în general ca $(2n+1)^2-2(2m+1)^2=-1$, o ecuaţie diofantică de tipul Pell $A^2-2B^2=-1$. Soluţia este cunoscută; soluţia primitivă este $(A_1,B_1)=(1,1)$, cu toate celelalte soluţii date de relaţiile de recurenţă $A_{k+1} = 3A_k + 4B_k$, $B_{k+1} = 2A_k + 3B_k$, pentru $k \geq 1$ (deci $(A_2, B_2) = (7, 5)$, etc). Aceasta descrie complet toate valorile lui n pentru care numărul N poate fi raţional. Prin metode clasice se obţine

$$A_k = \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^{2k-1} + (1-\sqrt{2})^{2k-1}\right),$$

$$B_k = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left((1+\sqrt{2})^{2k-1} - (1-\sqrt{2})^{2k-1}\right),$$

de unde valorile pentru n şi m pentru care N poate fi raţional. Acestea includ deci infinit de multe posibilităţi, care nu pot fi alminteri eliminate doar prin argumente modulo 4, ca în soluţia oficială, pentru cazul particular $n = 2013$. □

Subiectul (4)**.** *Se consideră mulţimea* $A = \{k \in \mathbb{N} \mid 501 \leq k \leq 1000\}$*. Pentru oricare element* $k \in A$*, notăm cu* d_k *cel mai mare divizor impar al numărului* k*.*

Arătaţi că numărul $p = d_{501} + d_{502} + \cdots + d_{1000}$ *este pătrat perfect.*

Cristian Mangra

Soluţie. Mai general, fie $A = \{k \in \mathbb{N} \mid n+1 \leq k \leq 2n\}$, pentru un număr natural nenul n. Fie şi $1 \leq 2m-1 \leq 2n-1$ un număr natural impar; va exista un număr natural unic ν_m astfel încât pentru $k = 2^{\nu_m}(2m-1)$ să avem $n+1 \leq k \leq 2n$, anume $\nu_m = \max\{\nu \in \mathbb{N} \mid 2^{\nu}(2m-1) \leq 2n\}$. Cum A conţine n elemente şi sunt n astfel de numere m, şi cum $d_k = 2m-1$, rezultă că $p = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} d_k = \sum\limits_{m=1}^{n} (2m-1) = n^2$, deci nu numai că am demonstrat că suma p este un pătrat perfect, dar i-am găsit şi valoarea.

Fenomenul este faimos, prin utilizarea sa în rezolvarea unei clasice probleme combinatorice a lui Erdös. Un alt exemplu unde cerinţa este superfluă; mult mai bine, se cerea direct valoarea sumei p. □

5. Clasa a VIII-a

Subiectul (2)**.** *Se consideră expresia* $E(x) = ax^2 + bx + c$*, unde* $a, b, c \in \mathbb{R}$*. Determinaţi numerele* a*,* b *şi* c *ştiind că* $E(x) \in \mathbb{Q}$ *oricare ar fi* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*, şi* $E(2013) = 2013$*.*

Cosmin Niţu

Soluţie. Soluţia oficială face uz de valori particulare pentru argumentul x; se obţine $\dfrac{E(\sqrt{2}) - E(-\sqrt{2})}{E(\sqrt{3}) - E(-\sqrt{3})} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \in \mathbb{Q}$ dacă am avea $b \neq 0$, deci trebuie $b = 0$. Urmează o eroare de tipar

$$E(2\sqrt{2}) = 8a + c \text{ şi } E(2\sqrt{2}) - 4 \cdot E(\mathbf{2}) = -3c \in \mathbb{Q}, \text{ deci } c \in \mathbb{Q} \text{ şi } a \in \mathbb{Q},$$

în loc de

$$E(2\sqrt{2}) = 8a + c \text{ şi } E(2\sqrt{2}) - 4 \cdot E(\sqrt{\mathbf{2}}) = -3c \in \mathbb{Q}, \text{ deci } c \in \mathbb{Q} \text{ şi } a \in \mathbb{Q}.$$

Finalmente, se obţine $a = 0$. Dar metoda nu mai funcţionează atât de rapid pentru expresii polinomiale de grad mai mare decât 2.

O abordare completă este posibilă. Fie, mai general, expresia polinomială $E(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, unde $a_k \in \mathbb{R}$ pentru $0 \leq k \leq n$ şi n număr natural, cu proprietatea de mai sus. Deoarece $\mathbb{Q}$ este numărabilă, dar $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nu este, principiul cutiei ne dă că există o valoare $v \in \mathbb{Q}$ pentru care $E(x) = v$ pentru o infinitate (nenumărabilă) de argumente (iraţionale) x, dar atunci polinomul $p(x) = E(x) - v$ este identic nul, deci $n = 0$ şi $E(x) = a_0$. Prin urmare toţi coeficienţii vor fi nuli, mai puţin termenul liber, egal cu 2013. □

Subiectul (3). *Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'BC'D'$ în care $AB = 12$, $BC = 9$ şi $AA' = 4$.*

Determinaţi minimul sumei $MA + MB + MC + MD$, unde M este un punct variabil pe faţa $A'B'C'D'$.

Cosmin Niţu

Soluţie. Soluţia oficială se complică în mod inutil; o metodă clasică permite obţinerea rapidă a rezultatului, după cum urmează.

Fie un punct M pe faţa $A'B'C'D'$, şi simetricul său M' faţă de centrul O' al feţei $A'B'C'D'$. Evident avem $MA = M'C$, $MB = M'D$, $MC = M'A$, $MD = M'B$, deci $\sum MA = \sum M'A$. Dar $MA + M'A \geq 2O'A$ (şi la fel celelalte asemănătoare), din inegalitatea medianei, cu egalitate doar pentru cazul când $M \equiv O' \equiv M'$. Dar $\sum O'A = 4\sqrt{4^2 + (9^2 + 12^2)/4} = 34$.

Din curiozitate, prin metode asemănătoare se obţine şi că maximul sumei $\sum MA$ se realizează când M este unul din vârfurile feţei $A'B'C'D'$. □

6. Încheiere

Încetul cu încetul calitatea etapei locale a Municipiului Bucureşti se ameliorează. Au fost mult mai puţine scăpări şi erori (în enunţuri şi soluţii) decât în anii precedenţi, deşi multe din probleme au rămas destul de neatractive.