Problema 3. Determinaţi numerele reale y astfel încât pentru orice număr real x, are loc egalitatea: $[x+2y] = \left[\frac{x}{y}\right] - [x+y] - \left[\frac{x}{3y}\right]$.

Dana Heuberger

Soluţie. Notăm cu $(*)$ relaţia din ipoteză. Evident, trebuie ca $y \neq 0$. Pentru $x = 0$, în $(*)$, obţinem $[2y] = -[y]$. (1)

Fie $[y] = k \in \mathbb{Z}$. Rezultă că $[2y] \in \{2k, 2k+1\}$ şi folosind (1), obţinem $k = 0 = [y] = [2y]$, deci $y \in (0,1) \cap \left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$. (1)

Pentru $x = y$, în $(*)$, rezultă $[3y] = 1 - [2y] - 0 = 1$, deci $y \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ şi folosind (1), deducem că $y \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. (2)

Cu $x = -4y$, în $(*)$, obţinem $[-2y] = -4 - [-3y] - \left[-\frac{4}{3}\right] = -2 - [-3y]$. (3)

Din (2), deducem că $-1 < -2y \leq -\frac{2}{3}$, deci $[-2y] = -1$, şi $-\frac{3}{2} < -3y \leq -1$, aşadar $[-3y] \in \{-2, -1\}$. Înlocuind în (3), rezultă $[-3y] = -1$, deci $y = \frac{1}{3}$.

Pentru $y = \frac{1}{3}$, relaţia $(*)$ devine: $\left[x + \frac{2}{3}\right] = [3x] - \left[x + \frac{1}{3}\right] - [x]$, adică $[3x] = [x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right]$, pentru orice număr real x, adevărat (Hermite).