**Problemă.** Fie funcţia $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real $x$. Arătaţi că:

a) $f(x) < \frac{3}{2}$, pentru orice $x > 0$;

b) pentru orice număr natural $n$, există $x_n \in \mathbb{R}$, astfel încât $f(x_n) > 2 - \frac{1}{n}$.

Olimpiadă Bielorusia

**Soluţie.** a) Pentru $x > 0$, cazul $x = 1$ este trivial; altfel sau $x$ sau $\frac{1}{x}$ este mai mare ca 1; fără a restrânge generalitatea putem presupune $x > 1$, deci $x = k + \{x\}$, pentru un întreg pozitiv $k \geq 1$. Atunci $\frac{1}{x} < 1$, deci $f(x) = \{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = \{x\} + \frac{1}{k + \{x\}} \leq \{x\} + \frac{1}{1 + \{x\}} < \frac{3}{2}$, căci revine la inegalitatea $(\{x\} - 1)(2\{x\} + 1) < 0$.

b) Punctul dinainte ne spune să căutăm $x_n < 0$. Atunci sau $x_n$ sau $\frac{1}{x_n}$ este cel mult egal cu $-1$. Putem atunci căuta $x_n < -1$, deci $x_n = k + \{x_n\}$, pentru un întreg negativ $k \leq -2$. Atunci $-1 < \frac{1}{x_n} < 0$, deci $\left\{\frac{1}{x_n}\right\} = 1 + \frac{1}{x_n}$, şi deci $f(x_n) = \{x_n\} + \left\{\frac{1}{x_n}\right\} = \{x_n\} + 1 + \frac{1}{k + \{x_n\}} = 2 - \left((1 - \{x_n\}) - \frac{1}{k + \{x_n\}}\right)$. Deoarece $\lim\limits_{k \to -\infty} \frac{1}{k + \{x_n\}} = 0$ şi $\lim\limits_{\{x_n\} \to 1} (1 - \{x_n\}) = 0$, nu ne rămâne decât să alegem un $x_n$ de forma $-(k + \varepsilon)$, cu $k$ suficient de mare şi $\varepsilon > 0$ suficient de mic.