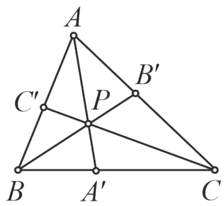
Problema 3. Fie triunghiul ABC şi punctele $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$ şi $C' \in (AB)$, astfel încât dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente în P.

Dacă $\max\left\{\dfrac{A'P}{AA'}, \dfrac{B'P}{BB'}, \dfrac{C'P}{CC'}\right\} = \dfrac{1}{3}$, demonstraţi că P este centrul de greutate al triunghiului ABC.

* * *

Soluţie. Notăm $\dfrac{AC'}{C'B} = x$, $\dfrac{BA'}{A'C} = y$ şi $\dfrac{CB'}{B'A} = z$.



Fără a restrânge generalitatea, alegem $\dfrac{A'P}{AA'} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{B'P}{BB'} \leqslant \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{C'P}{CC'} \leqslant \dfrac{1}{3}$.

Prin urmare, avem $\dfrac{AP}{PA'} = 2$, $\dfrac{BP}{PB'} \geqslant 2$, $\dfrac{CP}{PC'} \geqslant 2$. Din teorema lui Ceva, deducem că $xyz = 1$, iar din teorema lui Van Aubel, rezultă $\dfrac{AP}{PA'} = \dfrac{AC'}{C'B} + \dfrac{AB'}{B'C}$, $\dfrac{BP}{PB'} = \dfrac{BA'}{A'C} + \dfrac{BC'}{C'A}$ şi $\dfrac{CP}{PC'} = \dfrac{CB'}{B'A} + \dfrac{CA'}{A'B}$. Aşadar, $x + \dfrac{1}{z} = 2$, (1) $y + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$ (2) şi $z + \dfrac{1}{y} \geqslant 2$. (3)

Deoarece $xyz = 1$, avem (1) $\Leftrightarrow x + xy = 2$, deci $x = \dfrac{2}{1+y}$.

Din (2) deducem $y + \dfrac{1+y}{2} \geqslant 2 \Leftrightarrow y \geqslant 1$.

Cum $\dfrac{1}{y} \leqslant 1$, din (3) rezultă că $z \geqslant 1$ şi din $xyz = 1$ obţinem că $x \leqslant 1$. Deoarece $\dfrac{1}{z} \leqslant 1$, din (1) rezultă că $x \geqslant 1$. Prin urmare, deducem că $x = y = z = 1$, deci P este centrul de greutate al triunghiului ABC.