**Problema 2.** Fie $n$ un număr natural nenul şi $A$ o submulţime cu $2n+1$ elemente a mulţimii $\{1,2,3,\ldots,3n\}$. Arătaţi că există trei elemente în $A$ care să fie în progresie aritmetică.

***

**Soluţie.** Din principiul lui Dirichlet deducem că în mulţimea $A$ există $n+1$ elemente de aceeaşi paritate. Fie aceste elemente $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$, cu $1 \leqslant b_1 < b_2 < \ldots < b_{n+1} \leqslant 3n$. Considerăm mulţimea

$$B = \left\{ \frac{b_1+b_2}{2}, \frac{b_1+b_3}{2}, \ldots, \frac{b_1+b_{n+1}}{2} \right\}.$$

Evident $B \subset \{1,2,3,\ldots,3n\}$ şi $|B| = n$. Cu principiul includerii şi excluderii obţinem $3n \geqslant |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 3n+1-|A \cap B|$, prin urmare $|A \cap B| \geqslant 1$. Rezultă că există $i \in \{2,3,\ldots,n+1\}$ astfel încât $\frac{b_1+b_i}{2} \in A$.

In concluzie avem $b_1, \frac{b_1+b_i}{2}, b_i \in A$, iar aceste trei numere sunt în progresie aritmetică.