Etapa 4, Problema 1

Fie $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie strict crescătoare. Determinaţi numerele $x \in (0, \infty)$ cu proprietatea că

$$f\left(x^9\right) + f\left(x^{2015}\right) = f\left(x^{10}\right) + f\left(x^{2016}\right).$$

***

Soluţie.

Observăm că $x = 1$ este soluţie.

Dacă $x > 1$, atunci $x^9 < x^{10}$ şi $x^{2015} < x^{2016}$, prin urmare $f\left(x^9\right) + f\left(x^{2015}\right) < f\left(x^{10}\right) + f\left(x^{2016}\right)$.

Dacă $x \in (0, 1)$, atunci $x^9 > x^{10}$ şi $x^{2015} > x^{2016}$, aşadar $f\left(x^9\right) + f\left(x^{2015}\right) > f\left(x^{10}\right) + f\left(x^{2016}\right)$.

În concluzie, singura soluţie a ecuaţiei din enunţ este $x = 1$.