

Problema 1. Arătați că, dacă $x \in \mathbb{R}$ și $\{x\} = \{x^2\} = \{x^3\}$, atunci x este un număr întreg.

($\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a).

SGM 2011

Soluție:

○ Observăm că $x=0, x=1 \in \mathbb{Z}$ verifică condițiile din enunț.

○ dacă $x \neq 0, x \neq 1$, deoarece $(x^2 - x) \in \mathbb{Z}$ și $(x^3 - x^2) \in \mathbb{Z}$, deducem că $\frac{x^3 - x^2}{x^2 - x} = x \in \mathbb{Q}$.

Pe de altă parte, avem că există $p \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x^2 - x - p = 0$,

de unde $\Delta = 1 + 4p = (2m + 1)^2, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{1 \pm (2m + 1)}{2} \in \mathbb{Z}$.