Etapa 5, Problema 3

Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,...,99,100\}$. Determinați numărul tripletelor $(x;y;z)\in A\times A\times A$ cu proprietatea că $x<y<z$, iar numerele x,y,z sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice cu rația număr natural.

Soluție.

Notăm cu $r\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ rația progresiei; atunci $y=xr$ și $z=xr^2$. Deoarece $1\le x<xr<xr^2\le 1000$, deducem că $r^2\le\frac{100}{x}\le 100$. Însă $r\in\mathbb{N}$, deci $r\in\{2,3,...,10\}$.

Dacă $r=2$, atunci $x\le 25$ și obținem 25 progresii geometrice.

Dacă $r=3$, atunci $x\le\frac{100}{9}$ și obținem 11 progresii geometrice.

Dacă $r=4$, atunci $x\le\frac{100}{16}$ și obținem 6 progresii geometrice.

Dacă $r=5$, atunci $x\le\frac{100}{25}$ și obținem 4 progresii geometrice.

Dacă $r=6$, atunci $x\le\frac{100}{36}$ și obținem 2 progresii geometrice.

Dacă $r=7$, atunci $x\le\frac{100}{49}$ și obținem 2 progresii geometrice.

Dacă $r=8$, atunci $x\le\frac{100}{64}$ și obținem 1 progresie geometrică. Analog pentru $r=9$ și $r=10$.

În concluzie, există 53 triplete cu proprietățile din enunț.