Clasa a X-a - Etapa I - Problema 3

Enunţ. a) Fie vectorii $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$. Demonstraţi că $|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|^2+|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}|^2=2|\overrightarrow{u}|^2+2|\overrightarrow{v}|^2$;

b) În plan, se consideră 3 vectori $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}$ cu modulul egal cu 1. Demonstraţi că există o alegere a semnelor $\pm$ astfel încât $|\overrightarrow{u_1}\pm\overrightarrow{u_2}\pm\overrightarrow{u_3}|\leq\sqrt{3}$.

Soluţie. *a*) Se demonstrează folosind relaţia $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}=|\overrightarrow{u}|^2$.

b) Aplicând succesiv punctul precedent obţinem $\sum|\overrightarrow{u_1}\pm\overrightarrow{u_2}\pm\overrightarrow{u_3}|^2=12$, de unde obţinem concluzia. $\square$