

Folosind lema de mai sus, problema din concurs se rezumă la a verifica următoarea egalitate: $CE^2 + MF^2 = CF^2 + ME^2$. Nu este greu de sesizat că toate segmentele sunt calculabile relativ la $\triangle ABC$. Astfel,

$$\begin{aligned} CE^2 &= AE^2 + AC^2 + 2AE \cdot AC \cdot \sin(\angle CAB) \\ MF^2 &= MB^2 + BF^2 \\ CF^2 &= BC^2 + BF^2 + 2BC \cdot BF \cdot \sin(\angle CBA) \\ ME^2 &= MA^2 + AE^2 \end{aligned}$$

Concluzia problemei este echivalentă cu:

$$AC^2 + 2AE \cdot AC \cdot \sin(\angle CAB) = BC^2 + 2BC \cdot BF \cdot \sin(\angle CBA).$$

Folosind faptul că

$$AE = \frac{AB \cdot \cot(\angle CAB)}{2} \quad BF = \frac{AB \cdot \cot(\angle CBA)}{2}$$

egalitatea de demonstrat se rezumă la următoarea relație, evident adevărată:

$$AC^2 + AB \cdot AC \cdot \cos(\angle CAB) = BC^2 + AB \cdot BC \cdot \cos(\angle CBA),$$

ambele expresii fiind egale cu $\frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2}$. □

*Soluție alternativă*⁴.

⁴Soluția este inspirată de comentariul lui *jayme* de pe **AoPS**:

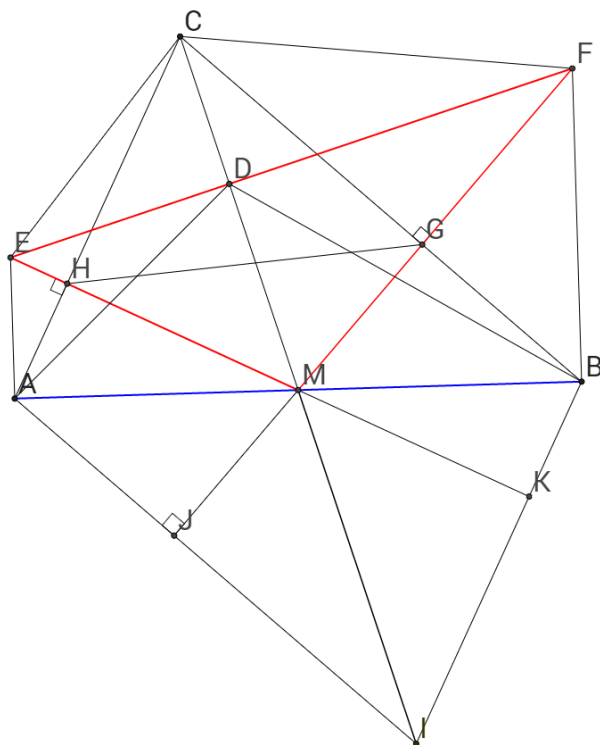
Dear Mathlinkers,

this nice problem is based on the concept of orthopole, then on the Pappus theorem and on a converse of the Reim's theorem.

Sincerely

Jean-Louis

<http://artofproblemsolving.com/community/c6h1106922p5018856>



Ne propunem să găsim ortopolul dreptei AB față de triunghiul MFE . Construim paralelogramul $ACBI$ și observăm că C, D, M, I sunt coliniare.

$$EA \perp AB, FB \perp AB, M \in AB$$

$$AI \parallel CB \perp MF, BI \parallel AC \perp ME.$$

Deci, ortopolul dreptei AB relativ la $\triangle ABC$ este punctul I . Din teorema ortopolului știm că $MI \perp EF$. \square

Remarcă. Soluția oficială arată conciclicitatea punctelor E, H, G, F unde $\{H\} = ME \cap AC$ și $\{G\} = MF \cap BC$. O dată observat acest lucru, citind unghiurile se ajunge imediat la faptul că patrulaterul $CDHF$ este inscriptibil, de unde concluzia. Esențială aici este întrebarea: cum exploatăm faptul că M este mijlocul lui BC ? Egalitatea $MB = MC$ nu ajută foarte mult, în schimb $MB^2 = MC^2$, combinat cu perpendicularitățile din ipoteză ne conduc natural la $MH \cdot MF = MG \cdot ME$.

Luând în considerare faptul că primele două subiecte nu s-au dovedit prea solicitante, problema de geometrie este prea ușoară pentru poziția a treia⁵,

⁵Analizând rezultatele, inegalitatea chiar s-a dovedit mai dificilă decât Problema(3). Media pe Problema(2) a fost de 2,75 puncte, iar pe Problema(3) de 4,63 puncte.

lucru confirmat de rezultatele finale (24 din cei 28 de medaliați cu aur și argint au luat scor maxim pe această problemă). Pe AoPS circulă multe soluții vectoriale și analitice ceea ce indică "atacabilitatea" subiectului.⁶

Subiectul (4). O „formă L” este oricare din următoarele patru piese, fiecare *constând din*⁷ *fiind formată din* trei pătrățele unite:



Se dau: o tablă 5×5 , *constând din formată din* 25 de pătrățele unite, un număr natural nenul $k \leq 25$ și o colecție nelimitată de „forme L”.

Doi jucători, A și B, joacă următorul joc: începând cu A, ei marchează, alternativ, câte un pătrățel care nu era marcat anterior, până când pe tablă sunt k pătrățele marcate.

O așezare a unor „forme L” pe pătrățelele rămase nemarcate pe tablă se numește bună dacă fiecare piesă acoperă exact trei pătrățele unite nemarcate și oricare două piese nu se suprapun.

Jucătorul B câștigă dacă orice așezare bună a unor „forme L” lasă neacoperite cel puțin trei pătrățele unite nemarcate. Determinați valoarea minimă a lui k pentru care B are strategie câștigătoare.

CIPRU

Soluție. Vom arăta că răspunsul este $k = 4$.

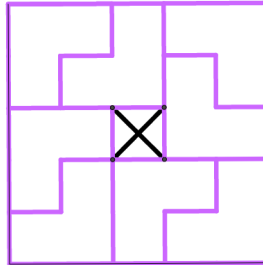
Mai întâi demonstrăm că pentru $k \in \{1, 2, 3\}$, A are strategie de câștig.

- $k = 1$. A așază prima (de fapt singura) piesă în centrul tablei. A câștigă deoarece există pavarea cu "forme L"⁸ ca în figura de mai jos.

⁶ <http://artofproblemsolving.com/community/c6h1106922p5018856>

⁷Prepoziția adecvată verbului *a consta* este *în*, nicidecum *din*.

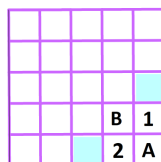
⁸Pentru enunțul problemei am folosit varianta românească a ghilimelelor (am citat întru totul enunțurile oficiale, deci implicit și stilul dactilografic), dar în rest am optat pentru acest tip de ghilimele, din motive care țin de estetică.



- $k = 2$. A așază prima piesă în centrul tablei, iar B va așeza a doua piesă în una din cele 8 "forme L" ale modelului de mai sus, anulând acoperirea acesteia. A câștigă deoarece tabla se va pava cu "forme L" exact ca mai sus, cu excepția formei anulate de B. Asta înseamnă că pe tablă vor rămâne doar două pătrățele neacoperite \Rightarrow A câștigă.
- $k = 3$. Pentru primele două mutări se procedează analog, iar la a treia mutare, A va așeza pătrățica în "forma L" anulată deja de B. Tabla se va pava ca în figură, cu excepția unei singure "forme L" căreia îi va lipsi o pătrățică \Rightarrow A câștigă.

Acum demonstrăm că pentru $k = 4$, B are strategie de câștig. Deoarece pe tablă rămân $25 - 4 = 21 \equiv 0 \pmod{3}$ pătrățele, pentru ca A să câștige, tabla trebuie să fie acoperită complet cu "figuri L".

- A pune prima pătrățică în unul din colțurile tablei. B o va pune pe următoarea ca în figura de mai jos. Indiferent ce mutare va face acum A, cel puțin unul dintre pătrățelele 1 sau 2 va rămâne liber. Dacă 1 este liber, B va ocupa pătrățica de deasupra lui (în cazul în care pătrățica de deasupra era deja ocupată de A, 1 este izolat și A pierde), iar dacă 2 este liber, B va ocupa pătrățica din stânga lui. În ambele situații, cel puțin unul dintre pătrățelele 1 sau 2 va rămâne izolat, deci imposibil de acoperit cu o "formă L" \Rightarrow B câștigă.



- A nu ocupă cu prima mutare niciun colț al tablei. Putem presupune că A pune prima piesă în jumătatea superioară a tablei, adică în primele trei rânduri (altfel întoarcem tabla). B mută ca în figura de mai jos. Dacă A nu ocupă niciunul dintre pătratele 1, 2 sau 3, atunci B ocupă pătratul 1 lăsând pătratele 2 și 3 imposibil de acoperit cu o "figură L". Dacă A îl ocupă pe 3, atunci B îl va ocupa pe 4, izolându-l pe 2. Dacă A îl ocupă pe 1 (2), B îl ocupă pe 2 (1), lăsând pătratul 3 imposibil de acoperit \Rightarrow B câștigă.

		B	1
	4	2	3

În toate cazurile s-a dovedit că B are strategie de câștig \Rightarrow $k=4$. □

Remarcă. Nu găsesc prea multe de menționat... Dacă ar fi să iau în considerare gustul meu combinatoric, aș zice că problema nu spune nimic din punct de vedere conceptual; este doar un joculeț simpatic. Pe de altă parte, o văd adecvată pentru un concurs de juniori... poate prea *subțirică* pentru Problema(4) (*încununarea Olimpiadei*).

2. ÎNCHEIERE

Obişnuită cu rigurozitatea site-ului concursurilor EGMO⁹, nu mă pot abține să nu afirm că site-ul oficial sârbesc nu s-a prezentat deloc la înălțime. În primul rând lipsește clasificarea pe țări (deși este considerat neoficial, toată lumea este curioasă să vadă clasamentul pe echipe și toate țările luptă pentru un loc fruntaș în acest clasament...). În al doilea rând, de ce lipsesc diacriticele din numele concurenților români? Atenția pentru astfel de detalii este un semn veritabil de respect (pentru eveniment și pentru persoana în sine). Mai lipsesc punctajele medii pe probleme precum și autorii/propunătorii subiectelor (am deschis AoPS-ul cu degetele încrucișate sperând că printr-un comentariu obscur cineva a menționat țara propunătoare... a mers!), informații utile în formarea unei perspective cât mai detaliate asupra competiției.

⁹ <https://www.egmo.org>

Acest concurs devine din ce în ce mai *plăpând* din punct de vedere matematic, deși nu trebuie desconsiderat, fiind printre puținele antrenamente internaționale disponibile pentru juniori. Problemele de anul acesta au constat într-o teorie a numerelor extrem de simplă, o inegalitate drăguță, o geometrie cam *străvezie* și o combinatorică din domeniul Teoriei Jocurilor. După cum au arătat și rezultatele, Problema(2) și Problema(3) trebuiau inversate.

Au participat 19 țări¹⁰ (dintre care 11 oficial balcanice), cu un total de 106 concurenți (62 din țările oficial balcanice). Rezultatele delegației României la JBMO 2015 au fost, cu felicitările de rigoare!

Andrei ECKSTEIN	SSMR	Universitatea "Politehnică" Timișoara		Leader
Marius PERIANU	SSMR	C. N. "Ion Minulescu" Slatina		Deputy
Mircea FIANU	SSMR	Șc. Gim."Tudor Arghezi" București		Observer
Nume	Clasa	Școala	Total	Medalie
Ștefan-Răzvan BĂLĂUCĂ	IX	C. N. "Mihai Eminescu" Botoșani	30	Argint
Ioan-Paul-Petru TÎRLIȘAN	VIII	Șc. Gim. "Mihai Eminescu" Bistrița-Năsăud	24	Argint
Ioan Andrei NICOLAE	VIII	ICHB București	28	Argint
Lenca-Iarina CUTURELA	VIII	ICHB București	26	Argint
Alexandra TIMOFTE	VII	C. N. I. "Tudor Vianu" București	25	Argint
Theodor-Mihai ILIANT	VIII	C. N. "Mircea cel Bătrân" Constanța	35	Aur
ROMÂNIA			168	Locul 2/11

Punctajul detaliat pe probleme a fost:

Nume	P1	P2	P3	P4	Σ	Medalie
Ștefan-Răzvan BĂLĂUCĂ	9	1	10	10	30	Argint
Ioan-Paul-Petru TÎRLIȘAN	10	2	10	2	24	Argint
Ioan Andrei NICOLAE	10	5	3	10	28	Argint
Lenca-Iarina CUTURELA	9	7	10	0	26	Argint
Alexandra TIMOFTE	10	5	0	10	25	Argint
Theodor-Mihai ILIANT	10	10	10	5	35	Aur
ROMÂNIA	58	30	43	37	168	Locul 2/11

¹⁰De fapt 18 țări... Serbia a participat cu doua echipe fiind țara gazdă.

România s-a clasat pe poziția a doua atât în clasamentul țărilor oficial balcanice, cât și în cel combinat, fiind depășită de Turcia cu 9 puncte. De menționat este că echipa noastră a obținut cel mai mare scor din concurs pe Problema(4) (combinatorică) ! **bravo !** fiind urmată **suprinzător** de Franța??

S-au acordat 8 medalii de Aur (40-32 puncte), 20 de Argint (30-23 puncte), 48 de Bronz (22-12 puncte) și 6 mențiuni de onoare. Scorul mediu a fost de 17,06/40 puncte. Pragurile medaliei au fost ceva mai lejere comparativ cu parametrii IMO. Respectând proporția de 1:2:3 pentru Aur:Argint:Bronz, trebuiau acordate 5-6 medalii de Aur, 10-12 de Argint și 15-18 de Bronz (luând în considerare numai cei 62 de concurenți din țările oficial balcanice).

Felicitări întregii delegații a României și mai ales medaliaților! Învățăm din fiecare experiență și evoluăm constant indiferent de vârstă, tot timpul fiind loc de mai mult, de mai bine...

**Na că am făcut și clasamentul pe țări și mediile pe probleme!!
Distrați-vă!**

Country	P1	P2	P3	P4	Σ
Turkey	60	39	52	26	177
Romania	58	30	43	37	168
Bulgaria	60	35	31	23	149
Serbia	57	25	48	11	141
Saudi Arabia	56	24	36	6	122
Kazakhstan	56	9	43	10	118
Greece	58	22	25	12	117
Azerbaijan	58	4	38	3	103
Republic of Moldova	60	13	19	2	94
Serbia B	51	6	31	4	92
Turkmenistan	50	7	28	0	85
France	34	2	13	30	79
Cyprus	31	12	29	0	72
Tajikistan	38	16	3	6	63
Bosnia and Herzegovina	33	15	13	1	62
FYR Macedonia	35	12	14	1	62
Albania	44	4	11	0	59
Montenegro	15	13	10	0	38
Kyrgyzstan	0	4	4	0	8
Mean Score	8.05	2.75	4.63	1.62	17.06/40