Problema 3. Fie $a \in (1, \infty)$. Determinați soluțiile reale ale ecuației

$$a^x - \log_a\left(-x^2 + ax + 1\right) = -x^2 + (a-1)x + 1.$$

Mihai Opincariu, Brad

Soluție:

Fie $t = \log_a\left(-x^2 + ax + 1\right)$. Atunci $a^t = -x^2 + ax + 1$ și ecuația din enunț devine:

$$a^x - t = a^t - x \iff a^x + x = a^t + t. \qquad (1)$$

Cum funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x + x$ este strict crescătoare (sumă de funcții strict crescătoare), rezultă că f este injectivă. Rescriem (1) sub forma $f(x) = f(t)$ și obținem

$$x = t \iff \log_a\left(-x^2 + ax + 1\right) = x \iff a^x = -x^2 + ax + 1. \qquad (2)$$

Având în vedere faptul că funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = a^x$ este strict convexă iar funcția $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = -x^2 + ax + 1$ este strict concavă, rezultă că ecuația (2) admite cel mult două soluții.

Observăm că $x = 0$ și $x = 1$ verifică atât ecuația (2), cât și ecuația inițială. Rezultă că acestea sunt singurele soluții.