Etapa 1, Problema 4

Determinaţi valoarea maximă a expresiei $E(x,y) = xy + \max(x,y)$, unde x, y sunt numere reale nenegative cu $x^2 + y^2 = 1$.

***

Soluţie (**Florea-Dan Şerboi**, Câmpulung)**.**

Putem presupune că $x = \max(x,y)$; atunci

$$E(x,y) = x(y+1) = \sqrt{(1+y)^2(1-y^2)} = \sqrt{27\left(\frac{1+y}{3}\right)^3(1-y)}$$

$$\leq \sqrt{27 \cdot \left(\frac{3 \cdot \frac{1+y}{3} + (1-y)}{4}\right)^4} = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

cu egalitate când $1 - y = \frac{1+y}{3} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$.

Rezultă că, în ipoteza asumată, valoarea maximă a lui $E(x,y)$ este $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, atinsă pentru $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $y = \frac{1}{2}$.