"OLIMPIADA" INTERNAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ "FORMULA OF UNITY" / "THE THIRD MILLENIUM" 2013/2014 – RUNDA A DOUA

Abstract. Comments on some of the problems presented at the new integrated International Mathematical Olympiad "Formula of Unity" / "The Third Millenium", 2013/2014, second round.

Data: 17 februarie 2014.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. Introducere

Aceste comentarii asupra **Olimpiadei Internaţionale de Matematică "Formula of Unity" / "The Third Millenium"**, 2013/2014, **runda a doua**, reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului. Ele sunt adăugate la o prezentare selectivă a probelor de concurs.[1]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

2. Prezentare

Acest nou eveniment, aflat la a doua ediţie, este se pare o continuare al unuia mai vechi, numit **"The Third Millenium"**. *De facto*, **"Formula of Unity"** este o traducere din expresia esperanto **"Formulo de Integreco"**, pe care, cred, grupul de lobby spaniol implicat l-a propus (deşi un robot de traducere oferă mai degrabă **"Formula of Integrity"**, ceea ce este oarecum comic ...). Limbile oficiale sunt rusa, engleza, spaniola şi esperanto!

---

[1]Adresele de Internet sunt

`http://formulo.org/`
`http://www.formulo.org/en/olimpiada/`

cu singurul loc unde am găsit problemele rundei a doua fiind Universitatea din Toronto!

`http://www.math.toronto.edu/oz/turgor/formulo.php`

(**breaking news** : problemele - în engleză (fără soluţii) - au fost în fine postate; partea rusească a site-ului le conţinea mai de mult (în rusă), ca şi alte informaţii mai ... private) iar pentru al doilea clip românesc (cu aceleaşi informaţii, dar mai moderat în exprimare)

`https://www.youtube.com/watch?v=4YDpoEzOApc`

Lipsesc multe probleme, la care nu am găsit interesul de a fi prezentate. Ordinea este dinspre clasa a XII-a către clasa a VI-a, căci (prea) multe probleme sunt reluate, cu versiunea "cea mai grea" la clasa cea mai mare. Problemele sunt cele ale etapei finale. Rezultatele se lasă încă aşteptate ...

Competiţia s-a desfăşurat în două etape. Prima – de calificare pentru cea de-a doua – a fost prin corespondenţă, acordându-se 3 săptămâni pentru rezolvarea problemelor postate pe site (şi a fost comentată în precedentul meu material); a doua s-a desfăşurat ”în timp real” pe data de 26 ianuarie 2014, şi va conduce la acordarea de premii şi invitaţii la o tabără de vară de matematică, în Rusia.

Un al doilea clip de 2’28” intitulat ”Testaţi la nivel internaţional”, a cărui adresă YouTube este oferită în pagina precedentă, reia aproape integral informaţiile primului, dar este ceva mai moderat în aprecieri. *Discretion is the better part of valour ...* (Falstaff, în Henric V)

3. Clasa a XII-a

Subiectul (2)**.** *Fie* $f(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 24$. *Rezolvaţi ecuaţia*

$$f(f(f(f(x)))) = 0.$$

Soluţie. Nu este prea greu de văzut că $f(x) = (x+3)^3 - 3$, ceea ce ne permite să calculăm $f(f(x)) = (x+3)^{3^2} - 3$, şi în general $f^n(x) = (x+3)^{3^n} - 3$ pentru a n-a iterată. Singura soluţie reală este deci $\boxed{x = -3 + \sqrt[3^n]{3}}$. □

Subiectul (5)**.** *Fie a şi n două numere naturale nenule.* ***Dat fiind*** *că a^n este un număr de* 2014 *cifre, determinaţi cea mai mică valoare nenulă k pentru care a* ***nu*** *poate fi un număr de k cifre.*

Soluţie. Fie k numărul cifrelor lui a, deci $10^{k-1} \leq a < 10^k$. Atunci avem şi $10^{(k-1)n} \leq a^n < 10^{kn}$. Prin urmare, dat fiind că numărul cifrelor lui a^n este 2014, avem $(k-1)n+1 \leq 2014 < kn+1$, adică $\dfrac{2013}{n} < k \leq \dfrac{2013}{n} + 1$. Dacă ne uităm la şirul de intervale de lungime 1 dat prin $I_n = \left(\dfrac{2013}{n}, \dfrac{2013}{n} + 1\right]$, va trebui să găsim cel mai mic întreg pozitiv k care nu este acoperit de ele. Deoarece $k = 1$ este acoperit (pentru $n = 2014$ de exemplu), trebuie să avem $\dfrac{2013}{n} + 1 < \dfrac{2013}{n-1}$, adică $n(n-1) - 2013 < 0$, deci $n \leq 45$. Dar avem

$$\frac{2013}{45} \approx 44.73,\quad \frac{2013}{44} = 45.75,\quad \frac{2013}{43} \approx 46.81,\quad \frac{2013}{42} \approx 47.93,\quad \frac{2013}{41} \approx 49.10,$$

deci primul astfel de întreg ne-acoperit este $\boxed{k = 49}$. Să observăm că pentru orice $1 \leq k \leq 48$ **chiar** există a şi n care îndeplinesc condiţiile problemei, căci intervalul $[10^{2013/n}, 10^{2014/n})$ conţine un întreg a corespunzător valorii k, pentru un $n > 41$ convenabil ales. □

Secţiunea următoare este închinată singurei probleme cu ”skepsis” (şi acela din greşeală ...), care a fost impulsul pentru a scrie această continuare a comentariilor mele. Este de datoria unui matematician să nu se lase doborât de un prim eşec, sau de o aparentă imposibilitate de a obţine un răspuns, şi să extragă *victory from the very jaws of defeat.*

4. Clasa a XII-a, P(6)

Subiectul (6). *Pavel a inventat un nou mod de a aduna numere. Pentru două numere reale a şi b,* ***pavel-suma*** *este definită prin* $a \oplus b = \dfrac{a+b}{1-ab}$ *(dacă această valoare este definită, adică pentru $ab \neq 1$). În mod natural, Pavel defineşte şi* ***pavel-produsul*** *unui număr întreg pozitiv n cu a, ca fiind pavel-suma de n termeni egali cu a, adică* $n \otimes a = \underbrace{(((a \oplus a) \oplus a) \oplus \cdots) \oplus a}_{de\ n\ ori\ a}$.

Există oare două numere naturale $x \neq y$ pentru care $\boxed{x \otimes y = y \otimes x}$*?*

Evident avem $\boxed{a \oplus b = \tan(\arctan a + \arctan b)}$ deci operaţia pare a fi de grup comutativ, **deşi există mari "issues" legate de domeniul de definire a operaţiei; desigur, $a \oplus b$ nu este definit pentru $ab = 1$, ceea ce face că poate $(a \oplus b) \oplus c$ este bine definit, dar $a \oplus (b \oplus c)$ nu.** O remediere posibilă ar fi să se prelungească operaţia $\oplus$ la *compactificarea Alexandrov* $\alpha\mathbb{R} \simeq S^1 \simeq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, prin $a \oplus b = \infty$ pentru $ab = 1$, $0 \oplus \infty = \infty$, $\infty \oplus \infty = 0$, $a \oplus \infty = -1/a$ pentru $a \notin \{0, \infty\}$.

Textul "soluţiei oficiale" spune (într-o engleză aproximativă)

> **Unfortunately, the author' solution of the problem contains a *crucial* error, and a correct solution is *unknown*.** Poate a "uitat" de $k\pi$ ...
>
> ....
>
> **Then $x \otimes y = y \otimes x$ means that**
>
> $$\tan(y \arctan(x)) = \tan(x \arctan(y))$$
>
> **and therefore** $y \arctan(x) = x \arctan(y) + k\pi$. **Running computer program (Mathematica) we found that for integers $1 \leq x < y \leq 30$ the expression**
>
> $$\frac{y \arctan(x) - x \arctan(y)}{\pi}$$
>
> **is not an integer. So, the answer is negative at least for $x < y \leq 30$.**

Soluţie. (Totuşi ...) Se ştie că pentru un întreg pozitiv n avem

$$\tan(n \arctan t) = \frac{\binom{n}{1}t - \binom{n}{3}t^3 + \cdots}{\binom{n}{0} - \binom{n}{2}t^2 + \cdots} = -\mathrm{i}\frac{(1+\mathrm{i}t)^n - (1-\mathrm{i}t)^n}{(1+\mathrm{i}t)^n + (1-\mathrm{i}t)^n},$$

deci căutăm soluţii întregi pozitive cu $x \neq y$ la ecuaţia

$$\frac{(1+\mathrm{i}x)^y - (1-\mathrm{i}x)^y}{(1+\mathrm{i}x)^y + (1-\mathrm{i}x)^y} = \frac{(1+\mathrm{i}y)^x - (1-\mathrm{i}y)^x}{(1+\mathrm{i}y)^x + (1-\mathrm{i}y)^x}.$$

Dar $\dfrac{A-\overline{A}}{A+\overline{A}} = \dfrac{B-\overline{B}}{B+\overline{B}}$ duce la $\dfrac{A}{\overline{A}} = \dfrac{B}{\overline{B}}$, deci obţinem relaţia din $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}x}{\overline{1+\mathrm{i}x}}\right)^y = \left(\frac{1+\mathrm{i}y}{\overline{1+\mathrm{i}y}}\right)^x.$$

Inelul $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ fiind UFD (cu factorizare unică), fie scrierea în fracţii reduse (unică până la unităţile ± 1 şi $\pm\mathrm{i}$)

$$\frac{1+\mathrm{i}x}{\overline{1+\mathrm{i}x}} = \prod_{k=1}^{r}\left(\frac{p_k}{\overline{p_k}}\right)^{\alpha_k} \text{ şi } \frac{1+\mathrm{i}y}{\overline{1+\mathrm{i}y}} = \prod_{\ell=1}^{s}\left(\frac{q_\ell}{\overline{q_\ell}}\right)^{\beta_\ell},$$

unde p_k, q_ℓ sunt prime din $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Rezultă că $r = s$ şi există o permutare $\sigma \in \mathcal{S}_r$ astfel ca $p_k = q_{\sigma(k)}$ şi $y\alpha_k = x\beta_{\sigma(k)}$. Există deci un element $z \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, astfel încât $\prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k} = z^p$ şi $\prod_{k=1}^{r} p_k^{\beta_k} = z^q$, unde $p = x/\gcd(x,y)$ şi $q = y/\gcd(x,y)$.

Pentru un întreg $n \geq 1$ avem $\gcd(1+n\mathrm{i}, 1-n\mathrm{i}) \mid 2$. În $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ elementul 2 nu este prim, căci $2 = (1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$, unde $\pm(1\pm\mathrm{i})$ sunt (singurele) prime conjugate asociate în divizibilitate. Se obţine acum foarte rapid că $\gcd(1+n\mathrm{i}, 1-n\mathrm{i}) = 1$ dacă şi numai dacă n este par (iar pentru n impar avem $\gcd(1+n\mathrm{i}, 1-n\mathrm{i}) = \pm(1\pm\mathrm{i})$). Prin urmare numerele prime p_k aparţin lui $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] \setminus (\mathbb{Z} \cup \{\pm(1\pm\mathrm{i})\})$. Reamintim şi notaţia (*norma*) $N(a+\mathrm{i}b) = a^2+b^2$.

Când x, y sunt ambele impare, atunci

$$\begin{aligned} 1+\mathrm{i}x &= (1+\mathrm{i})((\lfloor x/2\rfloor + 1) + \mathrm{i}\lfloor x/2\rfloor), \\ 1+\mathrm{i}y &= (1+\mathrm{i})((\lfloor y/2\rfloor + 1) + \mathrm{i}\lfloor y/2\rfloor), \end{aligned}$$

şi deci trebuie îndeplinită egalitatea $(*)$

$$N((\lfloor x/2\rfloor + 1) + \mathrm{i}\lfloor x/2\rfloor)^{\frac{1}{x}} = N((\lfloor y/2\rfloor + 1) + \mathrm{i}\lfloor y/2\rfloor)^{\frac{1}{y}}.$$

Să considerăm funcţia $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dată prin $f(t) = ((t+1)^2 + t^2)^{\frac{1}{2t+1}}$. Avem $\max\limits_{t\geq 0} f(t) \approx 1.7167$ în $\rho \approx 1.20373$, $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 1$, şi f descrescătoare pe $[\rho, \infty)$. Dar atunci, pentru orice întregi $m > n \geq 3$, avem

$$1 = f(0) < f(m) < f(n) < f(2) = \sqrt[5]{10} < \sqrt[3]{5} = f(1),$$

aşadar f este injectivă pe $\mathbb{N}$, şi ecuaţia $(*)$ nu are soluţii $x \neq y$ întregi.

Când x, y sunt ambele pare, atunci trebuie îndeplinită egalitatea $(**)$

$$N(1+\mathrm{i}x)^{\frac{1}{x}} = N(1+\mathrm{i}y)^{\frac{1}{y}}.$$

Să considerăm acum funcţia $g\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ dată prin $g(t) = (1+t^2)^{\frac{1}{t}}$. Avem $\max\limits_{t\geq 1} g(t) \approx 2.23612$ în $\rho \approx 1.98029$, $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = 1$, şi g descrescătoare pe $[\rho, \infty)$. Dar atunci, pentru orice întregi $m > n \geq 6$, avem

$$\sqrt{5} = g(2) > g(3) = \sqrt[3]{10} > \sqrt[4]{17} = g(4) > g(1) = 2 > \sqrt[5]{26} = g(5) > g(n) > g(m),$$

aşadar g este injectivă pe $\mathbb{N}^*$, şi ecuaţia $(**)$ nu are soluţii $x \neq y$ întregi.

Din cele spuse până aici, rămâne de analizat doar cazul când x, y sunt de parităţi diferite. Dar acum, dacă de exemplu x este par şi y impar, rezultă $p = x/\gcd(x, y)$ par, şi vom avea $1 + \mathrm{i}x = z^p$, deci

$$1 + x^2 = N(1 + \mathrm{i}x) = N(z^p) = N(z)^p = (N(z)^{p/2})^2,$$

cu $N(z)^{p/2} \in \mathbb{N}^*$, ceea ce este clar imposibil, căci $x > 0$.[2] □

5. Clasa a XI-a

Subiectul (2)**.** *Acelaşi cu Subiectul 2 de la clasa a XII-a.*

Subiectul (4)**.** 100000 *de pătrăţele sunt desenate în interiorul unui pătrat de latură* 100*. Diagonalele oricăror două pătrăţele nu se intersectează. Demonstraţi că cel puţin unul dintre pătrăţele are latura de lungime mai mică decât* 1*.*

Soluţie. Dintr-un motiv cu totul dubios, autorii optează pentru o partiţie a pătratului mare în $300 \cdot 300 = 90000$ de dale de dimensiuni $1/3 \times 1/3$, când o partiţie în $200 \cdot 200 = 40000$ de dale de dimensiuni $1/2 \times 1/2$ ar fi fost deajuns, şi ar fi redus numărul 100000 la chiar mai puţin de 50000.

Ideea este că dacă distanţa dintre centrele a două pătrăţele de latură cel puţin 1 este cel mult $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, atunci două dintre diagonalele lor se vor intersecta. Pricipiul cutiei aplicat la partiţia menţionată mai sus duce acum la soluţie.

Nu văd cum s-ar putea determina cu precizie numărul minim de pătrăţele care duce la concluzia cerută. Există un model simplu cu aproximativ 12500 de pătrăţele, care foloseşte drept contraexemplu. □

Subiectul (5)**.** *Acelaşi cu Subiectul 5 de la clasa a XII-a.*

Subiectul (6)**.** *Aceeaşi operaţie* $\oplus$ *ca la Subiectul 6 de la clasa a XII-a, dar la care era nevoie doar să se observe că operaţia este atât comutativă cât şi asociativă.*

Soluţie. Desigur, aceleaşi probleme legate de domeniul de definire prezentate în comentariul corespunzător de mai înainte. Nu este deci clar dacă această chestiune de coerenţă invalidează egalitatea expresiilor obţinute printr-o altă ordine a operaţiilor, şi care era argumentarea aşteptată de corectori. □

---

[2] Chiar şi cazul $p > 1$ impar ar fi dus la contradicţie, din conjectura Catalan (teorema Preda Mihăilescu). Acest caz particular era deja rezolvat de Lebesgue în 1850. Profesorul Alex Gica, într-o comunicare personală, îmi face cunoscut acest fapt, cu precizarea că ⟨⟨soluţia este tot cu aritmetica lui $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, dar problema nu este imediată. Demonstraţia este reprodusă în cartea [A.Gica & L.Panaitopol - *Probleme de Aritmetică şi Teoria Numerelor*], Editura Universităţii (Capitolul 17, Aritmetica în Inele Pătratice şi Cubice, Problema 25)⟩⟩.

6. CLASA A X-A

Subiectul (2). *Ann şi Betty aleg, fiecare, câte un număr întreg pozitiv. Apoi fiecare dintre ele scrie toţi divizorii pozitivi ai numărului ales. Ann scrie* 10 *numere, iar Betty scrie* 9 *numere. Câte numere distincte au fost scrise, dacă numărul* 6 *a fost scris de ambele?*

Soluţie. Se ştie că pentru un întreg pozitiv $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, numărul divizorilor săi pozitivi este $\tau(n) = \sum_{i=1}^{k}(\alpha_i + 1)$. Deoarece 6 este un divizor pentru ambele numere, înseamnă că numerele prime 2 şi 3 divid ambele numere alese. Dar $10 = 2 \cdot 5$ iar $9 = 3 \cdot 3$, prin urmare numărul a ales de Ann este $2 \cdot 3^4$ sau $2^4 \cdot 3$ iar numărul b ales de Betty este $2^2 \cdot 3^2$.

Numărul divizorilor pozitivi comuni celor două numere este evident dat de $\tau(\gcd(a, b)) = 6$ în ambele cazuri, deci numărul divizorilor pozitivi distincţi ai celor două numere este în ambele cazuri egal cu $\boxed{10 + 9 - 6 = 13}$.

Am mari dificultăţi în a înţelege valoarea acestei ”probleme”, absolut elementară, întrebată la o clasă atât de avansată. Cuvântul ”paternalistic” (”patronizing”) vine singur în minte ... □

Subiectul (5). *Acelaşi cu Subiectul 5 de la clasa a XII-a.*

Subiectul (6). *Aceeaşi operaţie* $\oplus$ *ca la Subiectul 6 de la clasa a XII-a, dar la care era nevoie doar să se observe că operaţia este atât comutativă cât şi asociativă.*

Soluţie. Vezi comentariile legate de domeniul de definire şi coerenţa notării, de la clasa a XI-a. □

7. CLASA A IX-A

Subiectul (1). *Acelaşi cu Subiectul 2 de la clasa a X-a.*

Subiectul (2). *Fie un cerc şi trei coarde ale sale, concurente şi de lungimi egale. Demonstraţi că fiecare dintre ele este un diametru.*

Soluţie. Huh? Duh! □

Subiectul (6). *O linie frântă închisă de lungime egală cu* 2014 *este desenată de-a lungul liniilor unei reţele de pătrate unitate. Care este aria maximă a figurii mărginite de această linie?*

Soluţie. Dacă a şi b sunt lungimile proiecţiilor acestei linii frânte pe cele două direcţii (ortogonale) ale reţelei, perimetrul figurii este de cel puţin $2(a + b)$, deci $a + b \le 1007$. Aria figurii este de cel mult $ab \le \boxed{503 \cdot 504}$, şi această valoare maximă este atinsă pentru frontiera unui dreptunghi de dimensiuni 503×504.

Soluţia oficială afirmă Among all rectangles with the fixed perimeter, a square has the greatest area (we use it as a **well known fact**). Nici măcar această banală afirmaţie nu necesita deci o demonstraţie! atunci care mai este rostul problemei? □

8. Clasa a VIII-a

Subiectul (1)**.** *Ann şi Betty aleg, fiecare, câte un număr întreg pozitiv. Apoi fiecare dintre ele scrie toţi divizorii pozitivi ai numărului ales. Ann scrie* 10 *numere, iar Betty scrie* 9 *numere. Câte numere distincte au fost scrise, dacă cel mai mare număr scris de ambele a fost* 50*?*

Soluţie. O versiune ”mai uşoară” a Subiectului 2 de la clasa a X-a!?! (vezi soluţia de acolo). Aici numărul divizorilor pozitivi comuni celor două numere a şi b este $\tau(\gcd(a,b)) = \tau(50) = 6$, deci numărul divizorilor pozitivi distincţi ai celor două numere este egal cu $\boxed{10 + 9 - 6 = 13}$; nici nu era măcar necesar să se deducă $a = 2 \cdot 5^4$, $b = 2^2 \cdot 5^2$, ceea ce ridică problema de principiu dacă situaţia chiar poate exista (de exemplu, dacă se spunea că Ann a scris 11 numere, răspunsul $11 + 9 - 6 = 14$ ar fi abuziv, căci nu există astfel de numere a şi b). Trebuie să-i credem pe propunători pe cuvânt? □

Subiectul (2)**.** *Acelaşi cu Subiectul 6 de la clasa a IX-a, dar cu lungimea* 36 *(ceea ce oferă soluţia de arie maximă* 9^2 *pentru un pătrat de latură* 9*).*

Subiectul (3)**.** *Acelaşi cu Subiectul 2 de la clasa a IX-a.*

Subiectul (6)**.** *Lev a adunat la suma a două numere întregi (strict) pozitive produsul lor, şi a obţinut* 1000*. Ce numere ar fi putut fi folosite? Găsiţi toate perechile posibile.*

Soluţie. O simplă factorizare (copilaşii de peste tot numesc aceasta **SFFT** ”Simon's Favourite Factoring Trick”) este ca din $x + y + xy = 1000$ să ajungem la $(x + 1)(y + 1) = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Mai departe e trivial. □

9. Clasele a VII-a, a VI-a

Subiectul (6 - Clasa a VII-a)**.** *Lipseşte din documentul menţionat mai sus, dar versiunea în limba rusă arată că de fapt era Subiectul 5, iar veritabilul Subiect 5 era cel de la clasa a a VI-a.*

Toate problemele acestor ultime două clase sunt simple aplicări ale regulii de trei simplă, sau manipulări aritmetice cu soluţii imediate.

10. Încheiere

Booooring ... We are not amused zicea Regina Victoria; we're not in Kansas anymore zicea Dorothy (păi, bine'nţeles, nu? doar suntem la Sankt Petersburg, sau whereabouts). Dacă nu era să fie Problema 6, clasa a XII-a, nu erau poate nici comentariile astea ale mele, dar ça valut bien une messe. Ite, missa est.