Problema 3. *Fie* $m,n\in\mathbb{N}^*$ *și notăm cu* d *cel mai mare divizor comun al lor. Demonstrați că numărul* $m!n!$ *divide numărul* $d(m+n-1)!$

J. Conway

Soluție: Demonstrația utilizează următoarele rezultate:

- C.m.m.d.c a două numere naturale nenule este număr natural nenul;
- Coeficienții binomiali sunt numere naturale nenule;
- $C_{m+n-1}^{m-1}=\dfrac{m(m+n-1)!}{m!n!}$ și $C_{m+n-1}^{n-1}=\dfrac{n(m+n-1)!}{m!n!}$;
- Dacă $(x;y)$ reprezintă c.m.m.d.c al numerelor naturale x și y atunci $(ab;ac)=a(b;c)$, pentru orice $a,b,c\in\mathbb{N}^*$.

Atunci evident $\left(\dfrac{m(m+n-1)!}{m!n!};\dfrac{n(m+n-1)!}{m!n!}\right)=\left(C_{m+n-1}^{m-1};C_{m+n-1}^{n-1}\right)$. Dar membrul drept este număr natural nenul, deci și membrul stâng. Problema este finalizată dacă remarcăm faptul că

$$\left(\frac{m(m+n-1)!}{m!n!};\frac{n(m+n-1)!}{m!n!}\right)=\frac{(m+n-1)!}{m!n!}(m;n)=\frac{d(m+n-1)!}{m!n!}.$$