Teorema lui Pick

Teorema: Într-un sistem cartezian se consideră un poligon ale cărui vârfuri au coordonatele întregi. Atunci aria poligonului este dată de formula : S=a+b/2-1, a reprezintă numărul de puncte de coordonate întregi din interiorul poligonului, iar b reprezintă numărul de puncte de coordonate întregi care aparţin poligonului.

Pentru a demonstra teorema lui Pick avem nevoie de următoarea:

Demonstraţie:

Lemă:

Teorema lui Pick este adevărată dacă poligonul este un triunghi oarecare sau un dreptunghi ale cărui
laturi sunt paralele cu axele de coordonate.

Demonstraţia lemei

Cazul 1.

Poligonul este un dreptunghi cu laturile paralele cu axele de coordonate. Dacă dreptunghiul, notat ABCD , conţine în interiorul laturii AB, a puncte de coordonate întregi şi b puncte de coordonate întregi în interiorul laturii BC, atunci lungimea lui AB este egală cu a+1 , lungimea laturii BC este b+1. Fie S aria dreptunghiului ABCD . Rezultă că aria dreptunghiului este (a+1)(b+1). În plus se obţine :

a+b/2-1=ab+1/2(2a+2b+4)-1= a+b+ab+1= (a+1)(b+1)=S

Cazul 2.

Poligonul este un triunghi ABC. Presupunem că laturile AB, BC şi AC conţin a,b respectiv c puncte de coordonate întregi, fără a considera capetele lor, şi interiorul triunghiului conţine t puncte de coordonate întregi.

a) Triunghiul ABC este dreptunghic şi are catetele paralele cu axele de coordonate

Dreptunghiul ABCD conţine 2t+1 puncte interioare de coordonate întregi. Pentru triunghiul ABC avem:

$$t+1/2s-1= t+1/2(a+b+c+3)-1=1/2* S_{ABCD} = S$$

În acest caz formula este verificată.

b) Triunghiul ABC are latura AB paralelă cu axa Ox şi punctul C aparţine laturii DE a dreptunghiului $ABDE$ (a se vedea Figura 2). Notăm cu $x,\ y,\ z$ numărul de puncte de coordonate întregi care aparţin laturilor $BD,\ DC,$ respectiv CE, capetele excluse. Fie

i_1, i_2 numărul de puncte de coordonate întregi din interiorul triunghiului BCD, respectiv ACE. Rezultă $a = y + z + 1$. Din proprietăţile ariei şi din cazurile precedente se obţine:
S $=$ Aria $(ABDE)$ $-$Aria (BCD) $-$ $-$Aria (ACE) $=$

$$= g + i_1 + i_2 + b + c + \frac{1}{2}(2a + 2x + 4) - 1 - \left[i_1 + \frac{1}{2}(b + x + y + 3) - 1\right] -$$

$$-\left[i_2 + \frac{1}{2}(c + x + z + 3) - 1\right] = g + \frac{1}{2}(a + b + c + 3) - 1 = \; = g + \frac{1}{2}\beta - 1$$

c) Triunghiul ABC are latura BC paralelă cu axa Oy şi unghiul B obtuz. Considerăm triunghiul dreptunghic ADC cu $B \in (DC)$ (a se vedea Figura 3) . Fie x (respectiv y) numărul de puncte de coordonate întregi care aparţin laturii (AD) (respectiv (DB)). Fie i_1 numărul de puncte de coordonate întregi, interioare triunghiului ADB. Se obţine:

$$\text{Aria}(ABC) = \text{Aria}(ADC) - \text{Aria}(ADB) = g + i_1 + a + \frac{1}{2}(x + y + b + 1 + c + 3) - 1 -$$

$$-\left[i_1 + \frac{1}{2}(x + y + a + 3 - 1)\right] =$$

$$= g + \frac{1}{2}(a + b + c + 3) - 1 \; g + \frac{1}{2}\beta - 1$$

d) Triunghiul ABC este înscris în dreptunghiul $ADEF$, $B \in (DE)$ şi $C \in (EF)$ (a se vedea Figura 4). Notăm cu x, y, z, t, u numărul de puncte de coordonate întregi care aparţin laturilor (AD), (DB), (BE), (EC), respectiv (CF); i_1, i_2, i_3 numărul de puncte de coordonate întregi care se găsesc în interiorul triunghiurilor ADB, BEC respective ACF. Precizând că $x = u + t + 1$, se obţine: Aria (ABC) Aria $(ADEF)$ $-$ Aria (ADB) $-$

$$-\text{Aria}(BEC) - \text{Aria}(ACF) = g + i_1 + i_2 + i_3 +$$

$$+a + b + c + \frac{1}{2}(2x + 2y + 2(z + 1) + 4) - 1 -$$

$$-\left[i_1 + \frac{1}{2}(x + y + a + 3) - 1\right] - \left[i_2 + \frac{1}{2}(z + t + b + 3 - 1)\right] -$$

$$-\left[i_3 + \frac{1}{2}(u + y + z + 1 + c + 3) - 1\right] =$$

$$= g + \frac{1}{2}(a + b + c + 3) - 1 = g + \frac{1}{2}\beta - 1$$

e) Triunghiul ABC are latura AC ca diagonală a dreptunghiului $ADCE$ şi punctul B în interiorul dreptunghiului (ceea ce înseamnă că unghiul B este obtuz, a se vedea Figura 5). Presupunem că AB intersectează (DC) în punctul F. Din relaţia

$$\text{Aria}(ABC) = \text{Aria}(AFC) - \text{Aria}(BFC),$$

procedând ca mai înainte, se demonstrează că formula este verificată şi în acest caz. În acest mod lema este complet demonstrată.

Demonstraţia teoremei lui Pick în cazul $n \geq 4$. Dacă numărul n de laturi ale poligonului este ≥ 4, teorema lui Pick se demonstrează prin inducţie după n. Urmăm prezentarea din [1], pag.68. Cazul $n = 3$ a fost tratat în cazul lemei de mai sus. Fie n un număr natural fixat, $n > 3$. Presupunem formula verificată pentru orice poligon cu m laturi $3 \leq m \leq n-1$. Considerăm un poligon cu n laturi, ale cărui vârfuri au coordonatele întregi. Orice poligon conţine o diagonală inclusă în interiorul poligonului: într-adevăr, dacă poligonul este convex, orice diagonală este inclusă în interiorul poligonului. Dacă poligonul nu este convex, considerăm un unghi interior de vârf V care este mai mare decât 180°. Fasciculul de raze care trec prin V şi sunt incluse în interiorul poligonului conţine cel puţin o rază care trece printr-un vârf al poligonului diferit de V, altfel poligonul ar avea aria infinită.

Fixăm o diagonală d care împarte poligonul în două poligoane P_1 şi P_2, fiecare cu un număr de laturi mai mic strict decât n şi deci pentru care formula este valabilă. Fie x numărul de puncte de coordonate întregi din interiorul diagonalei, $\mathcal{g}_1, \mathcal{g}_2$ numărul de puncte de coordonate întregi din interiorul celor două poligoane, β_1, β_2 numărul de puncte de coordonate întregi de pe cele două poligoane.

Obţinem :

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 - 2x - 2,\ \mathcal{g} = \mathcal{g}_1 + \mathcal{g}_2 + x$$

$$\mathcal{A} = \text{Aria}(P) = \text{Aria}(P_1) + \left(\mathcal{g}_2 + \tfrac{1}{2}\beta_2 - 1\right) = \left(\mathcal{g}_1 + \tfrac{1}{2}\beta_1 - 1\right) +$$

$$+\left(\mathcal{g}_2 + \tfrac{1}{2}\beta_2 - 1\right) = (\mathcal{g}_1 + \mathcal{g}_2) + \tfrac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) - 2 = \ = \left(\mathcal{g}_1 + \mathcal{g}_2 + x\right) + \tfrac{1}{2}$$

$$= \mathcal{g} + \tfrac{1}{2}\ (\beta + 2) - 2 = \mathcal{g} + \tfrac{1}{2}\beta - 1.$$

<u>**Probleme**</u>:

1. Se dau punctele de coordonate A(2.1), B(3,2), C(4,2) în axa de simetrie format din dreptele x, y. Aflaţi aria triunghiului ABC.

Rezolvare: Folosind Teorema lui Pick ne va da S=0+2-1=1 => Aria triunghiului ABC este 1.

Pentru a se pute citi se deschide pe Microsoft word(open with).