Problema 3
Etapa 5
Clasa a IX-a

Problema 3. Fie $ABCD$ un paralelogram, în care $AB = 5$, $BC = 3$ şi $BD = 4$. Fie I centru cercului înscris în triunghiul BCD, punctul M - mijlocul înălţimii $[DE]$ a triunghiului ABD cu $E \in AB$, iar N punctul de intersecţie al dreptelor IM şi AD.

Determinaţi valoarea raportului $\frac{AN}{ND}$.

Ip

$ABCD$ paralelogram cu $AB=5$, $BC=3$ și $BD=4$

I = centrul înscris al $\triangle BCD$

$DE \perp AB$, $E \in AB$

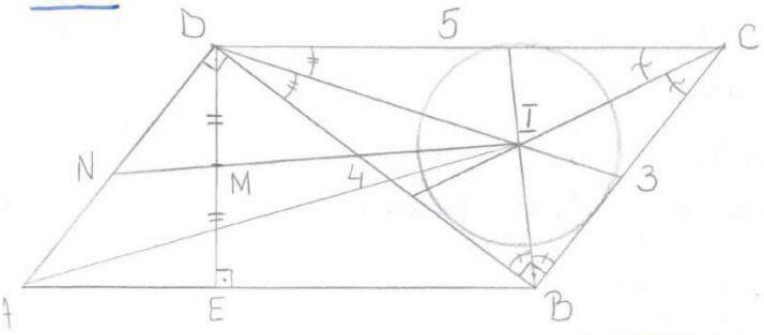
$M = mij[DE]$

$IM \cap AD = \{N\}$

Concl

$\frac{AN}{ND} = ?$

Dem



În $\triangle BCD$, $BD=4$, $BC=3$ și $CD=5 \xRightarrow{R.T.Pit.} BC^2+BD^2=CD^2$

$\Rightarrow \triangle BCD$ dr. în B.

Analog, $\triangle ABD$ dr. în D.

În $\triangle BCD$ dr. în $B \xRightarrow{T.\ catetei} AD^2 = AE \cdot AB$ (1)

$$\left.\begin{array}{l}\vec{AI} = \frac{1}{12}(5\cdot\vec{AB} + 3\cdot\vec{AD} + 4\cdot\vec{AC}) \\ ABCD \text{ paralelogram} \Rightarrow \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{AI} = \frac{1}{12}(9\vec{AB} + 7\cdot\vec{AD}) \quad (*)$$

Din (1) $\Rightarrow AE = \frac{AD^2}{AB} \Leftrightarrow AE = \frac{9}{5} \quad |: AB$

$$\Leftrightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{9}{25} \quad (\text{deoarece } AB = 5)$$

$$\Leftrightarrow \vec{AE} = \frac{9}{25}\vec{AB}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Deoarece } M \text{ este mijlocul segmentului } [DE], \text{ avem:} \\ \vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AE} + \vec{AD})\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{AM} = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{25}\vec{AB} + \vec{AD}\right)$$

$$\Leftrightarrow \vec{AM} = \frac{9}{50}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} \quad (**)$$

Fie $\frac{AN}{ND} = x$. Astfel, pentru a rezolva problema trebuie să aflăm valoarea lui x.

$$\Rightarrow AN = \frac{x}{x+1}\cdot AD \quad \left(\frac{AN}{AD} = \frac{x}{x+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \vec{AN} = \frac{x}{x+1}\cdot\vec{AD} \quad (***)$$

Din $(*)$ și $(***)$, obținem:

$$\vec{NI} = \vec{AI} - \vec{AN}$$

$$\Leftrightarrow \vec{NI} = \frac{1}{12}(9\vec{AB} + 7\vec{AD}) - \frac{x}{x+1}\vec{AD}$$

$$\Leftrightarrow \vec{NI} = \frac{9}{12}\vec{AB} + \frac{7-5x}{12(x+1)}\vec{AD} \quad (****)$$

Din $(**)$ și $(***)$, avem:

$$\vec{NM} = \vec{AM} - \vec{AN}$$

$$\Leftrightarrow \vec{NM} = \frac{9}{50}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{x}{x+1}\vec{AD}$$

$$\Leftrightarrow \vec{NM} = \frac{9}{50}\vec{AB} + \frac{1-x}{2(x+1)}\vec{AD} \quad (*****)$$

Punctele I, M și N sunt coliniare dacă și numai dacă $\exists\, y \in \mathbb{R}$ a.î. avem:

$$\vec{NI} = y \cdot \vec{NM}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{12}\vec{AB} + \frac{7-5x}{12(x+1)}\vec{AD} = y \cdot \left(\frac{9}{50}\vec{AB} + \frac{1-x}{2(x+1)}\vec{AD}\right)$$ (din relațiile (****) și (*****))

$$\left.\begin{array}{l} \Leftrightarrow \frac{9}{12} = y \cdot \frac{9}{50} \text{ și } \frac{7-5x}{12(x+1)} = y \cdot \frac{1-x}{2(x+1)} \\ \Leftrightarrow y = \frac{25}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{7-5x}{12(x+1)} = \frac{25}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7-5x}{12(x+1)} = \frac{25}{12} \cdot \frac{1-x}{x+1} \quad \Big| \cdot 12(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 7-5x = 25(1-x)$$

$$\Leftrightarrow 7-5x = 25-25x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{AN}{ND} = \frac{9}{10}.$$