**Etapa 7, Problema 3**

Fie $m$ şi $n$ numere naturale astfel încât numărul $2^{mn}-1$ se divide cu $(2^m-1)(2^n-1)$. Demonstraţi că $2(3^{mn}-1)$ se divide cu $(3^m-1)(3^n-1)$.

*Olimpiadă Armenia, 1999*

**Soluţie.**

Vom arăta, mai întâi, că numerele $m$ şi $n$ sunt prime între ele.

Pentru aceasta, fie $d=(m,n)$, iar $m=dx, n=dy$, cu $(x,y)=1$. Deoarece $d$ divide numerele $m$ şi $n$, rezultă că $2^d-1$ divide $2^m-1$ şi $2^n-1$, prin urmare $2^m\equiv 2^n\equiv 1\left(\mathrm{mod}2^d-1\right)$. Din ipoteză, $2^n-1$ divide $\frac{2^{mn}-1}{2^m-1}$, aşadar $2^d-1$ divide $\frac{2^{mn}-1}{2^m-1}$. Pe e altă parte,

$$\frac{2^{mn}-1}{2^m-1}=\sum_{k=0}^{n-1}2^{mk}\equiv\sum_{k=0}^{n-1}1=n\left(\mathrm{mod}2^d-1\right).$$

Deducem că $n\equiv 0\left(\mathrm{mod}2^d-1\right)$ şi analog se arată că $m\equiv 0\left(\mathrm{mod}2^d-1\right)$, deci $dx\equiv dy\equiv 0\left(\mathrm{mod}2^d-1\right)$.

Fie $p,q$ numere naturale astfel încât $dx=p\left(2^d-1\right)$ şi $dy=q\left(2^d-1\right)$; atunci $qdx=pdy$, prin urmare $qx=py$. Întrucât $(x,y)=1$, rezultă că $x$ divide $p$, aşadar există un număr natural $a$ pentru care $p=ax$. Deducem că $d=a\left(2^d-1\right)$, adică $2^d-1$ divide $d$. Se arată însă uşor că $2^d-1>d$, oricare ar fi $d\geq 2$. Urmează că $d=1$, ceea ce doream să arătăm.

Se demonstrează, folosind algoritmul lui Euclid, că c.m.m.d.c. al numerelor $3^m-1$ şi $3^n-1$ este $3^{(m,n)}-1$, în cazul nostru $3^1-1=2$. Evident, măcar unul dintre numerele $m$ şi $n$ este impar, deoarece numerele sunt prime între ele; fie $m=2k+1$. Atunci $3^m-1=3\cdot 9^k-1\equiv 2\,(\mathrm{mod}4)$, deci $3^m-1=2r$, unde $r$ este număr natural impar, cu $(r,3^n-1)=1$. Fiecare dintre numerele $3^m-1$ şi $3^n-1$ divide $3^{mn}-1$, prin urmare $3^{mn}-1$ se divide cu $r(3^n-1)$. Obţinem că $2(3^{mn}-1)$ se divide cu $2r(3^n-1)=(3^m-1)(3^n-1)$.