Problema 1

Se consideră șirul de numere naturale $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_1 = a$, $x_2 = b$ unde $0 < a < b$ și $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, pentru orice $n \geq 2$.

Determinați numărul perechilor (a, b) pentru care există $k \geq 3$ astfel încât $x_k = 100$.

Vasile Pop, GMB nr. 6-7-8/2020

Soluție:

Considerăm șirul lui Fibonacci $(F_n)_{n\geq 1}$: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $\forall n \geq 2$.

Avem: $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$, $F_9 = 34$, $F_{10} = 55$, $F_{11} = 89$, $F_{12} > 100$.

Pentru șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ avem $x_3 = a + b$, $x_4 = a + 2b$, $x_5 = 2a + 3b$, $x_6 = 3a + 5b$.

Se demonstrează prin inducție că pentru orice $n \geq 3$ avem $x_n = aF_{n-2} + bF_{n-1}$.

Într-adevăr, dacă presupunem că $x_k = aF_{k-2} + bF_{k-1}$, pentru orice $3 \leq k \leq n$, avem succesiv

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} = aF_{n-2} + bF_{n-1} + aF_{n-3} + bF_{n-2} = a\left(F_{n-2} + F_{n-3}\right) + b\left(F_{n-1} + F_{n-2}\right) = aF_{n-1} + bF_n,$$

adică afirmația este adevărată și pentru valoarea $n + 1$.

Pentru orice $n \geq 3$ avem $x_n = aF_{n-2} + bF_{n-1} = a\left(F_{n-2} + F_{n-1}\right) + (b - a)F_{n-1} = aF_n + (b - a)F_{n-1}$.

Din relația $x_n = 100$ obținem $aF_n + (b - a)F_{n-1} = 100$, iar dacă ținem cont că a și $b - a$ sunt numere naturale nenule, rezultă $n < 11$.

Pentru $n = 10$ avem: $55a + 34(b - a) = 100$ fără soluții.

Pentru $n = 9$ avem: $34a + 21(b - a) = 100$ fără soluții.

Pentru $n = 8$ avem: $21a + 13(b - a) = 100$ fără soluții.

Pentru $n = 7$ avem: $13a + 8(b - a) = 100 \Rightarrow a = 4,\ b - a = 6$ adică $a = 4,\ b = 10$ (1 soluție).

Pentru $n = 6$ avem: $8a + 5(b - a) = 100 \Rightarrow \begin{cases} a = 5,\ b - a = 12 \\ \text{sau} \\ a = 10,\ b - a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5,\ b = 17 \\ \text{sau} \\ a = 10,\ b = 14 \end{cases}$ (2 soluții).

Pentru $n = 5$ avem: $5a + 3(b - a) = 100 \Leftrightarrow 2a + 3b = 100$ cu $a \leq 20$, care admite soluțiile:

$(a,b) \in \{(2,32);\ (5,30);\ (8,28);\ (11,26);\ (14,24);\ (17,22)\}$ (6 soluții).

Pentru $n = 4$ avem: $3a + 2(b - a) = 100$; a este par și $3a \leq 100 \Rightarrow a \leq 33$, deci a ia 16 valori.

Obținem soluțiile: $(a,b) \in \{(2,49);\ (4,48);\ (6,47);\ \ldots;(30,35);\ (32,34)\}$ (16 soluții).

Pentru $n = 3$ avem: $2a + (b - a) = 100$ adică $a + b = 100$. Cum $0 < a < b$ obținem soluțiile:

$(a,b) \in \{(1,99);\ (2,98);\ (3,97);\ \ldots;(48,52);\ (49,51)\}$ (49 soluții).

Total: 49+16+6+2+1=74 soluții.

BAREM

Demonstrează $x_n = aF_{n-2} + bF_{n-1},\ \forall n \geq 3$ .... 2 puncte

Obține $n < 11$ .... 1 punct

Finalizare .... 4 puncte