Problema 3.

Fie M o mulţime de n numere complexe ($n \geq 2$). Să se arate că pentru orice număr natural nenul $m \leq \frac{n}{2}$ există o partiţie a mulţimii M: $M = U \cup V$, U cu m elemente şi V cu $n - m$ elemente astfel încât

$$\left|\sum_{u \in U} u\right| \leq \left|\sum_{v \in V} v\right|.$$

Vasile Pop

Soluţie. Vom trata mai întâi cazul $m = \frac{n}{2}$ (posibil doar dacă n este număr par). Atunci partiţionăm arbitrar mulţimea M în două submulţimi disjuncte M_1 şi M_2 cu câte m elemente fiecare. Dacă avem

$$\left|\sum_{z_1 \in M_1} z_1\right| \leq \left|\sum_{z_2 \in M_2} z_2\right|$$

alegem $U = M_1$ şi $V = M_2$, iar în caz contrar alegem $U = M_2$ şi $V = M_1$.

Rămâne de tratat cazul $m < \frac{n}{2}$. Prin absurd, presupunem că pentru orice submulţime $U \subset M$ cu m elemente avem inegalitatea contrară:

$$\left|\sum_{u \in U} u\right| > \left|\sum_{z \in M \setminus U} z\right|.$$

Ridicând la pătrat şi folosind relaţia $|w|^2 = w \cdot \overline{w}$, obţinem

$$(*) \qquad \sum_{u \in U} |u|^2 + \sum_{\substack{u_1 \neq u_2 \\ u_{1,2} \in U}} u_1 \cdot \overline{u_2} > \sum_{v \in V} |v|^2 + \sum_{\substack{v_1 \neq v_2 \\ v_{1,2} \in V}} v_1 \cdot \overline{v_2}, \ V = M \setminus U.$$

Adunăm aceste relaţii pentru toate cele C_n^m submulţimi U şi notăm

$$S_1 = \sum_{z \in M} |z|^2, \quad S_2 = \sum_{\substack{z_1 \neq z_2 \\ z_{1,2} \in M}} z_1 \cdot \overline{z_2}.$$

Pentru $m \geq 2$ obţinem:

$$(**) \qquad C_{n-1}^{m-1} \cdot S_1 + C_{n-2}^{m-2} \cdot S_2 > C_{n-1}^{n-m-1} \cdot S_1 + C_{n-2}^{n-m-2} \cdot S_2$$

Raţionamentul funcţionează şi pentru $m = 1$ cu convenţia $C_{n-2}^{m-2} = 0$. Împărţind relaţia $(**)$ prin C_n^m rezultă:

$$\frac{m}{n} \cdot S_1 + \frac{m(m-1)}{n(n-1)} \cdot S_2 > \frac{n-m}{n} \cdot S_1 + \frac{(n-m-1)(n-m)}{n(n-1)} \cdot S_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{n-2m}{n}(S_1 + S_2) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad S_1 + S_2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\sum_{z \in M} z\right|^2 < 0, \ \textbf{absurd!}$$

Contradicţia la care am ajuns încheie demonstraţia.