Problema 4. Determinaţi câte numere naturale de trei cifre au suma cifrelor cel puţin egală cu 10, iar produsul cifrelor cel mult egal cu 10.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

Soluţie. Fie a, b şi c cifrele unui număr cu $a + b + c \geq 10$ şi $a \times b \times c \leq 10$. Presupunem $a \leq b \leq c$. Dacă $a = 0$ putem avea $b = c$ care pot lua valorile 5, 6, 7, 8 sau 9. Se obţin $5 \times 2 = 10$ numere. Tot pentru $a = 0$ putem avea pentru b şi c valorile 1 şi 9, 2 şi 8, 2 şi 9, 3 şi 7, 3 şi 8, 3 şi 9, 4 şi 6, 4 şi 7, 4 şi 8, 4 şi 9, 5 şi 6, 5 şi 7, 5 şi 8, 5 şi 9, 6 şi 7, 6 şi 8, 6 şi 9, 7 şi 8, 7 şi 9, 8 şi 9. Cum fiecare pereche generează 4 numere (de exemplu: 190, 910, 109, 901) vom avea 80 de numere. Aşadar, pentru $a = 0$ avem 90 de numere. Dacă $a = 1$, pentru $b = 1$ putem să avem $c = 8$ sau $c = 9$ de unde obţinem încă 6 numere. Situaţia $a = 1$ şi $b \geq 2$ nu poate avea loc deoarece produsul $a \cdot b \cdot c$ devine mai mare decât 10. Dacă $a = 2$, cum $a \leq b \leq c$ singura posibilitate ca $a \times b \times c \leq 10$ este să avem $b = c = 2$, dar atunci $a + b + c = 8$ ceea ce nu convine. Dacă $a > 2$ nu mai găsim soluţii. În concluzie, sunt 96 de numere cu proprietăţile din enunţ.