Determinaţi numerele naturale a şi b pentru care ecuaţia

$$|\,ax+b\,|+|\,ax-b\,|=100$$

are exact trei soluţii în mulţimea numerelor întregi.

Andrei Eckstein

Soluţie: Dacă $a=0$ ecuaţia devine $2b=100$ care are o infinitate de soluţii întregi dacă $b=50$ şi niciuna dacă $b\neq 50$. În continuare presupunem că $a\neq 0$.

• Dacă $x<-\frac{b}{a}\leq 0$, ecuaţia revine la $-2ax=100$, adică $x=-\frac{50}{a}<-\frac{b}{a}$ dacă $b<50$, deci în acest caz ecuaţia are cel mult o soluţie.

• La fel, dacă $x>\frac{b}{a}\geq 0$, ecuaţia revine la $2ax=100$, adică $x=\frac{50}{a}>\frac{b}{a}$ dacă $b<50$, deci şi în acest caz ecuaţia are cel mult o soluţie.

• În fine, în cazul $x\in\left[-\frac{b}{a}\ \frac{b}{a}\right]$, ecuaţia revine la $2b=100$, adică $b=50$, care este verificată de orice $x\in\left[-\frac{b}{a}\ \frac{b}{a}\right]$.

Deoarece în celelalte cazuri nu se obţin decât cel mult două soluţii, trebuie ca şi în acest caz să avem cel puţin o soluţie, prin urmare este necesar ca $b=50$. În acest caz soluţiile găsite în cazurile precedente nu convin (trebuia $b<50$), deci mulţimea soluţiilor întregi ale ecuaţiei este $\left[-\frac{b}{a}\ \frac{b}{a}\right]\cap\mathbb{Z}$, unde $b=50$. Pentru ca această mulţime să aibă exact 3 elemente trebuie ca $1\leq\frac{b}{a}<2$, adică $25<a\leq 50$. Într-adevăr, pentru $a\in\{26,27,\ldots,50\}$ şi $b=50$, ecuaţia din enunţ are trei soluţii întregi: -1, 0 şi 1.