

Problema 3. Pe un cerc sunt scrise șapte numere naturale astfel încât suma oricăror trei numere consecutive este 9. Arătați că toate numerele sunt egale.

* * *

Soluție Fie a, b, c, d, e, f, g cele 7 numere.

Scriem că suma oricăror trei numere consecutive este 9:

$$a + b + c = 9$$

$$b + c + d = 9$$

$$c + d + e = 9$$

$$d + e + f = 9$$

$$e + f + g = 9$$

$$f + g + a = 9$$

$$g + a + b = 9$$

Adunând cele șapte relații obținem

$$3 \times (a + b + c + d + e + f + g) = 63,$$

de unde

$$a + b + c + d + e + f + g = 21.$$

Acum putem scrie

$$a + b + c + d + e + f + g = a + (b + c + d) + (e + f + g) = 21$$

deoarece adunarea este asociativă.

Se știe că fiecare paranteză este egală cu 9, așadar,

$$a + 9 + 9 = 21,$$

de unde

$$a = 3.$$

Mai putem scrie

$$a + b + c + d + e + f + g = b + c + d + e + f + g + a$$

deoarece adunarea este comutativă.

Atunci

$$b + c + d + e + f + g + a = b + (c + d + e) + (f + g + a) = 21,$$

de unde

$$b + 9 + 9 = 21$$

adică

$$b = 3.$$

Din

$$g + a + b = 9$$

pentru că

$$a = b = 3$$

obținem

$$g = 3.$$

Din

$$f + g + a = 9$$

pentru că

$$g = a = 3$$

obținem

$$f = 3.$$

Din

$$e + f + g = 9$$

pentru că

$$f = g = 3$$

obținem

$$e = 3.$$

Din

$$d + e + f = 9$$

pentru că

$$e = f = 3$$

obținem

$$d = 3.$$

Din

$$c + d + e = 9$$

pentru că

$$d = e = 3$$

obținem

$$c = 3.$$

În concluzie $a = b = c = d = e = f = g = 3$.