Etapa 7, Problema 2

Dacă $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, fie B mulțimea funcțiilor bijective $f:\{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}$. Pentru orice funcție $f \in B$, considerăm mulțimea $A_f = \{|i - f(i)| \mid i \in \{1,2,...,n\}\}$.

a) Demonstrați că $\bigcup_{f \in B} A_f = \{0,1,2,...,n-1\}$.

b) Dacă $n = 4k+2$ sau $n = 4k+3$, $k \in \mathbb{N}$, arătați că $|A_f| \leq n-1$, oricare ar fi $f \in B$.

***

Soluție.

a) Observăm că $A_f \subseteq \{0,1,2,...,n-1\}$, deci $\bigcup_{f \in B} A_f \subseteq \{0,1,2,...,n-1\}$. Pentru fiecare $k \in \{1,2,...,n-1\}$, contruim funcția $f \in B$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \notin \{n-k, n\} \\ n, & x = n-k \\ n-k, & x = n \end{cases}$. Atunci $0 \in A_f$ și $k \in A_f$, prin urmare $\{0,1,2,...,n-1\} \subseteq \bigcup_{f \in B} A_f$, de unde concluzia.

b) Presupunem prin reducere la absurd că există $f \in B$ cu $A_f = \{0,1,2,...,n-1\}$. Atunci $\sum_{i=1}^{n} |i - f(i)| = \frac{n(n-1)}{2}$. Dar $\frac{n(n-1)}{2}$ este impar pentru numerele n având forma din ipoteza . Cum $\sum_{i=1}^{n} (i - \alpha(i)) = 0$ și sumele $\sum_{i=1}^{n} |i - f(i)|$ și $\sum_{i=1}^{n} (i - \alpha(i))$ au aceeași paritate, obținem contradicție.