Conice - Câteva proprietăţi elementare

lect.dr. Mihai Chiş
Facultatea de Matematică şi Informatică
Universitatea de Vest din Timişoara

Viitori Olimpici ediția a 13-a, etapa I, clasa a XII-a

1 Definiţii şi ecuaţii canonice

1.1 Elipsa

Definiţie 1.1. Fie $F_1, F_2 \in \Pi$ două puncte oarecare fixate în plan, iar $d \in (0, \infty)$ un număr pozitiv cu proprietatea că $d > F_1F_2$. *Elipsa* de focare F_1 şi F_2 şi axă mare d este locul geometric al punctelor din plan pentru care suma distanţelor până la focarele F_1 şi F_2 este egală cu d:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(F_1, F_2, d) = \{M \in \Pi |\ MF_1 + MF_2 = d\}.$$

Observaţie 1.2. Cercul $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, r)$ de centru O şi rază r este un caz particular de elipsă pentru care $F_1 = F_2 = O$ şi $d = 2r$.

Observaţie 1.3. Considerând un reper ortogonal cu originea O în mijlocul segmentului $[F_1F_2]$, cu axa $Ox = F_1F_2$, notând $|F_1F_2| = 2c$ şi $d = 2a$, coordonatele focarelor vor fi $F_1(c, 0)$ şi $F_2(-c, 0)$. Atunci

$$M(x, y) \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2a \Longleftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x^2 + y^2 + c^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2} = 2a^2 \Longrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

unde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Reciproc, dacă coordonatele punctului M verifică ecuaţia (1), atunci

$$MF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2} = \left|a - \frac{c}{a}x\right|,$$

şi analog

$$MF_2 = \left|a + \frac{c}{a}x\right|.$$

Dacă (x, y) verifică (1), atunci $x^2 \le a^2$, astfel că $\left|\frac{c}{a}x\right| \le a$ şi

$$MF_1 = a - \frac{c}{a}x\,, \quad MF_2 = a + \frac{c}{a}x\,.$$

Rezultă că $MF_1 + MF_2 = 2a = d$, şi $M \in \mathcal{E}$.
Prin urmare,

$$M(x, y) \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Ecuaţia (1) se numeşte ecuaţia canonică a elipsei.

1.2 Hiperbola

Definiţie 1.4. Fie $F_1, F_2 \in \Pi$ două puncte oarecare fixate în plan, iar $d \in (0, \infty)$ un număr pozitiv cu proprietatea că $d < F_1F_2$. *Hiperbola* de focare F_1 şi F_2 şi axă mare d este locul geometric al punctelor din plan pentru care valoarea absolută a diferenţei distanţelor până la focarele F_1 şi F_2 este egală cu d:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(F_1, F_2, d) = \{M \in \Pi |\, |MF_1 - MF_2| = d\}.$$

Observaţie 1.5. Considerând un reper ortogonal cu originea O în mijlocul segmentului $[F_1F_2]$, cu axa $Ox = F_1F_2$, notând $|F_1F_2| = 2c$ şi $d = 2a$, avem că

$$M(x, y) \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow MF_1 - MF_2| = 2a \Longleftrightarrow |\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}| = 2a \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x^2 + y^2 + c^2 - \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2} = 2a^2 \Longrightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2)$$

unde $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Reciproc, dacă coordonatele punctului M verifică ecuaţia (2), atunci

$$MF_1 = \left|a - \frac{c}{a}x\right| \quad \text{şi} \quad MF_2 = \left|a + \frac{c}{a}x\right|.$$

Dacă (x, y) verifică (2), atunci $x^2 \ge a^2$, şi $\left|\frac{c}{a}x\right| \ge a$. Dacă $x \ge a$, atunci

$$MF_1 = \frac{c}{a}x - a\,, \quad MF_2 = \frac{c}{a}x + a\,, \text{ şi } MF_1 - MF_2 = -2a \Longrightarrow M \in \mathcal{H}.$$

Dacă $x \le -a$, atunci

$$MF_1 = -\frac{c}{a}x + a\,, \quad MF_2 = -\frac{c}{a}x - a\,, \text{ şi } MF_1 - MF_2 = 2a \Longrightarrow M \in \mathcal{H}.$$

Prin urmare,

$$M(x, y) \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Ecuaţia (2) se numeşte ecuaţia canonică a hiperbolei.

1.3 Parabola

Definiţie 1.6. Fie $F \in \Pi$ un punct, iar $\delta \subseteq \Pi$ o dreaptă în plan. *Parabola* de focar F şi dreaptă directoare δ este locul geometric al punctelor egal depărtate de focarul F şi dreapta direcoare δ:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(F, \delta) = \{M \in \Pi |\, MF = dist(M, \delta)\}.$$

Observaţie 1.7. Considerăm un reper ortogonal cu originea O în mijlocul segmentului $[FP]$, unde $P = pr_\delta(F)$ este proiecţia focarului F pe directoarea δ, cu axa $Ox = FP$(şi deci $Oy \parallel \delta$). Dacă $p = dist(F, \delta)$, atunci focarul F are coordonatele $F(\frac{p}{2}, 0)$, iar directoarea δ are ecuaţia $x = -\frac{p}{2}$. Avem atunci:

$$M(x, y) \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow MF = dist(M, \delta) \Longleftrightarrow \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \Longleftrightarrow y^2 = 2px\,. \quad (3)$$

1.4 Excentricitate

Propoziţie 1.8. *Fie $F \in \Pi$ un punct, $\delta \subseteq \Pi$ o dreaptă în plan, iar $e \in (0, 1)$. Atunci locul geometric $\mathcal{L}$ al punctelor M din plan cu proprietatea că $MF = e \cdot dist(M, \delta)$ este o elipsă având un focar în F şi pentru care raportul dintre distanţa focală şi axa mare este egal cu e.*

Demonstraţie. Considerăm un reper ortogonal xOy în care δ coincide cu axa Oy şi are ecuaţia $x = 0$, iar F are coordonatele $(p, 0)$, unde $p = dist(F, \delta)$. Atunci

$$M \in \mathcal{L} \Longleftrightarrow MF = e \cdot dist(M, \delta) \Longleftrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = e \cdot |x| \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (1 - e^2)x^2 - 2px + p^2 + y^2 = 0 \Longleftrightarrow \left(x - \frac{p}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{p^2 e^2}{(1 - e^2)^2} \quad (*).$$

Considerând un nou reper ortogonal $x'O'y'$ cu $O'\left(\frac{p}{1-e^2}, 0\right)$, în raport cu care coordonatele sunt $x' = x - \frac{p}{1-e^2}$, $y' = y$, notând $a = \frac{pe}{1-e^2}$ şi $b = \frac{pe}{\sqrt{1-e^2}}$, atunci

$$(*) \Longleftrightarrow \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1\,.$$

Prin urmare, $\mathcal{L}$ este o elipsă cu centrul în O', semiaxă mare $a = \frac{pe}{1-e^2}$, semiaxă mică $b = \frac{pe}{\sqrt{1-e^2}}$ şi semidistanţă focală $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{pe^2}{1-e^2}$. Deoarece $FO' = |p - \frac{p}{1-e^2}| = \frac{pe^2}{1-e^2} = c$, punctul F este unul dintre focare, al doilea fiind simetricul lui F faţă de centrul elipsei O'. În plus, avem că

$$\frac{c}{a} = \frac{pe^2}{1 - e^2} \cdot \frac{1 - e^2}{pe} = e.$$

$\square$

Observaţie 1.9. Numărul $e = \frac{c}{a}$ se numeşte *excentricitatea elipsei.* Deoarece cercul este un caz particular de elipsă, de semidistanţă focală $c = 0$, cercul poate fi considerat o elipsă de excentrictate nulă.

Propoziţie 1.10. *Fie $F \in \Pi$ un punct, $\delta \subseteq \Pi$ o dreaptă în plan, iar $e \in (1, \infty)$. Atunci locul geometric $\mathcal{L}$ al punctelor M din plan cu proprietatea că $MF = e \cdot dist(M, \delta)$ este o hiperbolă având un focar în F şi pentru care raportul dintre distanţa focală şi axa mare este egal cu e.*

Demonstraţie. La fel ca în cazul elipsei, considerăm un reper ortogonal xOy în care δ coincide cu axa Oy şi are ecuaţia $x = 0$, iar F are coordonatele $(p, 0)$, unde $p = dist(F, \delta)$. Atunci

$$M \in \mathcal{L} \iff MF = e \cdot dist(M, \delta) \iff \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = e \cdot |x| \iff$$

$$\iff (1-e^2)x^2 - 2px + p^2 + y^2 = 0 \iff \left(x - \frac{p}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2} \quad (**).$$

Procedăm în continuare ca în cazul elipsei şi considerăm reperul ortogonal $x'O'y'$ cu $O'\left(\frac{p}{1-e^2}, 0\right)$, în raport cu care coordonatele sunt $x' = x - \frac{p}{1-e^2}$, $y' = y$. Notăm $a = \frac{pe}{e^2-1}$, $b = \frac{pe}{\sqrt{e^2-1}}$ şi $c = \sqrt{a^2+b^2} = \frac{pe^2}{e^2-1}$. Atunci

$$(**) \iff \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1\,,$$

astfel că $\mathcal{L}$ este o hiperbolă cu centrul în O', semiaxa mare $a = \frac{pe}{e^2-1}$ şi semidistanţa focală $c = \frac{pe^2}{e^2-1}$. Deoarece $FO' = c$, rezultă că unul dintre focarele hiperbolei este punctul F. De asemenea, are loc egalitatea $\frac{c}{a} = e$. La fel ca în cazul elipsei, e se numeşte *excentricitatea* conicei. $\square$

2 Ecuaţia generală a unei conice. Polara unui punct în raport cu o conică. Pol al unei drepte în raport cu o conică

Fără demonstraţie dăm următoarea propoziţie:

Propoziţie 2.1. *Fie xOy un reper ortogonal fixat, iar $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c \in \mathbb{R}$, astfel încât matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ este nenulă, iar matricea $D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}$ este inversabilă. Locul geometric $\mathcal{C}$ al punctelor din plan ale căror coordonate verifică ecuaţia*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

este atunci o conică :
- o elipsă dacă $\delta = det(A) > 0$,
- o hiperbolă dacă $\delta < 0$,
- o parabolă dacă $\delta = 0$.

În continuare vom considera că o conică $\mathcal{C}$ este dată de ecuaţia

$$(\mathcal{C}): \qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0 \qquad (C)$$

Observaţie 2.2. O dreaptă oarecare din plan poate avea cel mult două puncte de intersecţie cu conica $\mathcal{C}$. Dacă dreapta d are ecuaţia $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, acestea se determină rezolvând sistemul de ecuaţii

$$d \cap \mathcal{C} : \quad \begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \end{cases}$$

Când soluţiile sistemului de mai sus nu sunt perechi de numere reale vom spune că dreapta şi conica au puncte de intersecţie imaginare. Astfel, orice dreaptă intersectează o conică în două puncte(reale sau imaginare, care eventual pot coincide).

Definiţie 2.3. Fie $M(x_0, y_0) \in \Pi$ un punct oarecare din plan. Dreapta p_M de ecuaţie

$$(p_M): \quad (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + b_1)x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + b_2)y + b_1x_0 + b_2y_0 + c = 0$$

se numeşte *polara punctului* M în raport cu conica $\mathcal{C}$.

Observaţie 2.4. Deoarece $\det(D) \neq 0$, pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$(cu $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$) există un unic punct $M(x_0, y_0) \in \Pi$ cu proprietatea că

$$\frac{a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + b_1}{\alpha} = \frac{a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + b_2}{\beta} = \frac{b_1x_0 + b_2y_0 + c}{\gamma} .$$

Atunci dreapta d de ecuaţie $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ este exact polara p_M a punctului M, iar M se numeşte *polul dreptei* d în raport cu conica $\mathcal{C}$.

Propoziţie 2.5. *Dacă d este o dreaptă oarecare care trece printr-un punct M, $N \in d \cap p_M$, iar $d \cap \mathcal{C} = \{P, Q\}$, atunci M şi N sunt conjugate armonic faţă de P şi Q.*

Demonstraţie. Dacă M_x, N_x, P_x, Q_x sunt proiecţiile punctelor M, N, P, Q pe axa Ox, atunci

$$(M, N|P, Q) = -1 \Longleftrightarrow (M_x, N_x|P_x, Q_x) = -1 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (x_M - x_P)(x_N - x_Q) + (x_M - x_Q)(x_N - x_P) = 0 \Longleftrightarrow 2(x_Mx_N + x_Px_Q) = (x_M + x_N)(x_P + x_Q) . \qquad (\nabla)$$

Pentru o dreaptă oarecare d care trece prin punctul M vom determina în funcţie de panta sa m abscisa punctului N, precum şi valorile sumei $x_P + x_Q$ şi produsului x_Px_Q. Notând

$$\alpha = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + b_1 , \quad \beta = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + b_2 , \quad \gamma = b_1x_0 + b_2y_0 + c ,$$

ecuaţia polarei p_M devine $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, iar abscisa punctului N este

$$x_N = \frac{m\beta x_0 - \beta y_0 - \gamma}{\alpha + m\beta} .$$

Coordonatele punctelor P şi Q sunt date de sistemul de ecuaţii

$$d \cap \mathcal{C} : \quad \begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0 \\ y = m(x - x_0) + y_0 \end{cases}$$

Făcând substituţia $y = m(x-x_0)+y_0$ în ecuaţia conicei, abscisele x_P şi x_Q sunt atunci soluţiile ecuaţiei

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}x(m(x-x_0)+y_0) + a_{22}(m(x-x_0)+y_0)^2 + 2b_1x + 2b_2(m(x-x_0)+y_0) + c = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (a_{11} + 2ma_{12} + m^2a_{22})x^2 + 2(-ma_{12}x_0 + ma_{22}(y_0 - mx_0) + b_1 + mb_2)x +$$
$$+ a_{22}(y_0 - mx_0)^2 + 2mb_2(y_0 - mx_0) + c = 0.$$

Din relaţiile lui Viète rezultă atunci că

$$x_P + x_Q = -2 \cdot \frac{-ma_{12}x_0 + ma_{22}(y_0 - mx_0) + b_1 + mb_2}{a_{11} + 2ma_{12} + m^2a_{22}},$$

respectiv

$$x_Px_Q = \frac{a_{22}(y_0 - mx_0)^2 + 2mb_2(y_0 - mx_0) + c}{a_{11} + 2ma_{12} + m^2a_{22}}.$$

Egalitatea (∇) se verifică atunci uşor. $\square$

Rezultatul din propoziţia de mai sus justifică următoarea definiţie:

Definiţie 2.6. Fie $M, N \in \Pi$ două puncte în plan. Spunem că N *este conjugat cu* M în raport cu conica $\mathcal{C}$ dacă $N \in p_M$.

Observaţie 2.7. Relaţia de conjugare definită mai sus este simetrică:

$$N \in p_M \Longleftrightarrow (a_{11}x_M + a_{12}y_M + b_1)x_N + (a_{12}x_M + a_{22}y_M + b_2)y_N + b_1x_M + b_2y_M + c = 0$$

$$\Longleftrightarrow a_{11}x_Mx_N + a_{12}(x_My_N + y_Mx_N) + a_{22}y_My_N + b_1(x_M + x_N) + b_2(y_M + y_N) + c = 0$$
$$\Longleftrightarrow M \in p_N.$$

Observaţie 2.8. Cu notaţiile din propoziţia de mai sus, dacă $P = Q$(i.e., d este tangentă la conica $\mathcal{C}$), atunci $N = P = Q$, astfel că $d \cap p_M = d \cap \mathcal{C}$. Acest lucru este rămâne atunci valabil pentru orice punct $M \in d$. Cum $M \in p_N \Longleftrightarrow N \in p_M$, deducem că pentru un punct $N \in \mathcal{C}$ polara p_N este exact tangenta în N la conica $\mathcal{C}$.

Observaţie 2.9. Din simetria relaţiei de conjugare în raport cu conica $\mathcal{C}$ deducem şi că pentru trei puncte $M, N, P \in \Pi$ are loc echivalenţa

$$P \in p_M \cap p_N \Longleftrightarrow M, N \in p_P \Longleftrightarrow MN = p_P.$$

Observaţie 2.10. Pentru $M, N, P \in \Pi$ sunt atunci echivalente afirmaţiile

$$M, N, P - \text{ coliniare} \Longleftrightarrow p_M, p_N, p_P - \text{ concurente.}$$

Observaţie 2.11. Dacă pentru o dreaptă $d \subseteq \Pi$ notăm cu P_d polul dreptei d în raport cu conica $\mathcal{C}$, atunci pentru trei drepte $a, b, c \subseteq \Pi$ avem echivalenţa

$$a, b, c - \text{ concurente} \Longleftrightarrow P_a, P_b, P_c - \text{ coliniare.}$$