Problema 3. Fie $k \in (0,1)$ un număr real. Pe laturile (AB), (BC), (CA) ale triunghiului ascuţitunghic ABC se consideră punctele M, N, respectiv P astfel încât $AM = k \cdot AB$, $BN = k \cdot BC$ şi $CP = k \cdot CA$. Arătaţi că

$$\frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{MN^2 + NP^2 + PM^2} \leq 4.$$

Când are loc egalitatea?

Olimpiadă Iugoslavia, 1971

Soluţie:
Fie $PP' \perp AB$, $CC' \perp AB$, $P', C' \in AB$. Aplicând teorema generalizată a lui Pitagora în triunghiurile ABC şi AMP obţinem:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC',$$

$$MP^2 = AM^2 + AP^2 - 2 \cdot AM \cdot AP'.$$

Folosind că $AM = k \cdot AB$, $AP = (1-k) \cdot AC$ şi $\dfrac{AP'}{AC'} = \dfrac{AP}{AC} = 1 - k$, obţinem $MP^2 = k^2 \cdot AB^2 + (1-k)^2 \cdot AC^2 - 2k(1-k) \cdot AB \cdot AC'$.
Dar $2 \cdot AB \cdot AC' = AB^2 + AC^2 - BC^2$, deci $MN^2 = k^2 \cdot AB^2 + (1-k)^2 \cdot AC^2 - k(1-k) \cdot (AB^2 + AC^2 - BC^2)$, adică

$$MN^2 = k(1-k) \cdot BC^2 - k(1-2k) \cdot AB^2 - (1-k)(2k-1) \cdot CA^2.$$

Analog se obţin relaţiile: $NP^2 = k(1-k) \cdot CA^2 - k(1-2k) \cdot BC^2 - (1-k)(2k-1) \cdot AB^2$ şi $PM^2 = k(1-k) \cdot AB^2 - k(1-2k) \cdot CA^2 - (1-k)(2k-1) \cdot BC^2$.
Adunând aceste trei relaţii obţinem

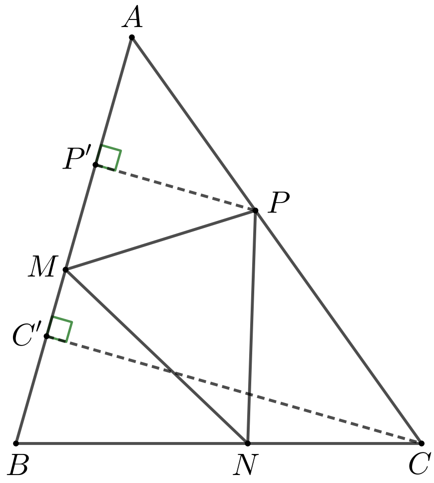
$$MN^2 + NP^2 + PM^2 = (3k^2 - 3k + 1)(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

Aşadar,

$$\frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{MN^2 + NP^2 + PM^2} = \frac{1}{3k^2 - 3k + 1}.$$

Trebuie să demonstrăm că $\dfrac{1}{3k^2 - 3k + 1} \leq 4$.

Deoarece $3k^2 - 3k + 1 = 3\left(k^2 - k + \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{4} = 3\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} \geq \dfrac{1}{4} > 0$, putem înmulţi cu $3k^2 - 3k + 1$. Inegalitatea de demonstrat revine la $12k^2 - 12k + 4 \geq 1$, adică la $3(2k-1)^2 \geq 0$, inegalitate evident adevărată. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $k = \dfrac{1}{2}$, adică dacă M, N, P sunt mijloacele laturilor.


A
P′
P
M
C′
B
N
C