Problema 1. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ numere reale pentru care există $x, y, z \in [0, 1]$ care verifică sistemu de ecuaţii:

$$\begin{cases} x^2 + y - 2z = a \\ -2x + y^2 + z = b \\ x - 2y + z^2 = c. \end{cases}$$

a) Determinaţi valoarea minimă a sumei $a + b + c$, precum şi tripletele (x, y, z) pentru care această valoare minimă se atinge.

b) Rezolvaţi sistemul de mai sus, dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ sunt numere cu $a + b + c = 0$.

a) $a+b+c = x^2+y-2z+(-2x)+y^2+z+x-2y+z^2$

$\Leftrightarrow a+b+c = x^2-x+y^2-y+z^2-z$

$\Leftrightarrow a+b+c = \left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)+\left(y^2-2\cdot y\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)+\left(z^2-2\cdot z\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\left.\begin{array}{l}\Leftrightarrow a+b+c = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4} \\ p^2 \geq 0,\ \forall p \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow a+b+c \geq 0+0+0-\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow a+b+c \geq -\frac{3}{4}$ pentru $x=y=z=\frac{1}{2}$ avem egalitate

b) Pentru $a=b=c=0$, avem:

$a+b+c=0$

$\Leftrightarrow x^2-x+y^2-y+z^2-z=0 \quad |\cdot 4$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x+4y^2-4y+4z^2-4z=0 \quad |+3$

$\Leftrightarrow (4x^2-4x+1)+(4y^2-4y+1)+(4z^2-4z+1)=3$

$\Leftrightarrow ((2x)^2-2\cdot 2x\cdot 1+1^2)+((2y)^2-2\cdot 2y\cdot 1+1^2)+((2z)^2-2\cdot 2z\cdot 1+1^2)=3$

$\Leftrightarrow (2x-1)^2+(2y-1)^2+(2z-1)^2=3$

$x\in[0;1] \Rightarrow 2x\in[0;2] \Rightarrow (2x-1)\in[-1;1] \Rightarrow |2x-1|\leq 1$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}(2x-1)^2\leq 1 \\ (2y-1)^2\leq 1 \\ (2z-1)^2\leq 1\end{array}\right\} \Rightarrow (2x-1)^2+(2y-1)^2+(2z-1)^2=3\leq 3$

$\Rightarrow |2x-1|=|2y-1|=|2z-1|=1$

$\Rightarrow (x, y, z) \in \{0; 1\}^3$

$\Rightarrow S = \{(1;1;1), (1;1;0), (1;0;0), (1;0;1), (0;1;1), (0;1;0), (0;0;1), (0;0;0)\}$

În concluzie, la subpunctul a) am obținut $\min(a+b+c) = -\frac{3}{4}$ pt $x = y = z = \frac{1}{2}$, iar la b) mulțimea de tripluri de mai sus.