

Clasa a X-a - Etapa I - Problema 3

Enunț: Într-o sală există 2021 întrerupătoare, corespunzătoare la 2021 becuri. Inițial toate becurile sunt stinse. În sală intră succesiv 2021 copii. Fiecare copil schimbă starea becurilor corespunzător întrerupătoarelor pe care le atinge, adică dacă becul era stins îl aprinde, iar dacă becul era aprins îl va stinge. Se știe că acel copil care are numărul k apasă pe întrerupătoare din k în k , începând cu primul, pentru orice $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2021\}$. De exemplu, al cincilea copil apasă pe întrerupătoarele 1, 6, 11, 16 etc. Determinați numărul de becuri rămase aprinse după ce toți cei 2021 copii au trecut prin sală.

Soluție. Evident că un bec va rămâne aprins la final dacă întrerupătorul corespunzător este atins de un număr impar de copii. De exemplu, primul bec va fi la final aprins.

Fie $l \geq 2$. Să remarcăm că starea becului cu numărul l este modificată de copilul cu numărul k dacă și numai dacă $l - 1$ se divide cu k . Prin urmare, becul cu numărul l va fi la final aprins doar dacă $l - 1$ are număr impar de divizori, adică $l - 1$ este pătrat perfect. Cel mai mare pătrat perfect, mai mic decât 2021, este $44^2 = 1936$, de unde deducem că $l - 1 \in \{1^2, 2^2, \dots, 44^2\}$. Ținând cont de observația inițială, concluzionăm că sunt 45 de becuri care rămân aprinse. \square