Problema 1. Determinaţi numerele naturale nenule x şi y pentru care

$$x^{x+y} = y^{y-x}.$$

Concurs Austria-Polonia, 1999

Soluţie:

Fie $d = (x, y)$ şi $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x = ad$, $y = bd$ şi $(a, b) = 1$. Atunci ecuaţia din enunţ se scrie succesiv: $(ad)^{(a+b)d} = (bd)^{(b-a)d}$, $(ad)^{a+b} = (bd)^{b-a}$, $a^{a+b}d^{2a} = b^{b-a}$. De aici rezultă că a divide b^{b-a}. Cum $(a, b) = 1$, deducem că $a = 1$. În acest caz, ecuaţia devine $b^{b-1} = d^2$, deci b este fie impar, fie pătrat perfect.

Dacă $b = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $d = (2k+1)^k$, deci $x = (2k+1)^k$ şi $y = (2k+1)^{k+1}$.

Dacă $b = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $d = n^{n^2-1}$, deci $x = n^{n^2-1}$, $y = n^{n^2+1}$.