Problema 4.

Andronache Andrei Teodor

Se ştie că $\{1,2,...,7\}=\{a_1,a_2,...,a_7\}=\{b_1,b_2,...,b_7\}$.

a) Să se determine maximul şi minimul sumei $S=\sum_{k=1}^{7}\frac{a_k}{b_k}$.

b) Dacă $S=\frac{2x+1}{2}$, $x\in\mathbb{N}$, să se arate că măcar trei termeni ai sumei sunt numere naturale.

Soluţie problema 4, etapa 4:

Ca o observaţie iniţială, putem presupune că $b_i = i$, pentru $i=\overline{1,7}$ (altfel, permutăm numerele a_i).

a) Vom folosi **Inegalitatea rearanjamentelor:**

$$x_ny_1 + x_{n-1}y_2 + ... + x_1y_n \le x_{\sigma(1)}y_1 + x_{\sigma(2)}y_2 + ... + x_{\sigma(n)}y_n \le x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n \ ,$$

adevărată pentru orice două şiruri de numere reale $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$ şi $y_1 \le y_2 \le ... \le y_n$, şi pentru orice permutare σ a n-tupletului $(1;2;...;n)$ (evident , $n\in\mathbb{N}^*$) .

Aplicăm acum aceasta inegalitate pentru 7-tupletele $(a_1;a_2;...;a_n)$ şi $(\frac{1}{1};\frac{1}{2};...;\frac{1}{7})$, obţinem că $7=\sum_{i=1}^{7}\frac{i}{i}\le S\le\sum_{i=1}^{7}\frac{i}{8-i}=\frac{26}{35}+13$.

Este evident că valoarea 7 se obţine pentru $a_i = i$, pentru orice $i=\overline{1,7}$, iar valoarea $\frac{26}{35}+13$ pentru $a_i = 8-i$, pentru orice $i=\overline{1,7}$, deci acestea sunt valorile minimă, repsectiv maximă.

b) Este evident că $\frac{a_1}{1}\in\mathbb{N}$.

Avem $\frac{2x+1}{2}=\frac{\sum_{i=1}^{7}a_i*\frac{7!}{i}}{7!}$.

Fie acum $q\in\{5;7\}$. Avem $q|7!\Rightarrow q|\sum_{i=1}^{7}a_i*\frac{7!}{i}$ (deoarece q este impar), deci $q|a_q*\frac{7!}{q}$.

Dar $(q;\frac{7!}{q})=1$ (singurul multimplu al lui q dintre $1;2;...;7$ este q). Astfel, $q|a_q$, deci $\frac{a_1}{1};\frac{a_5}{5};\frac{a_7}{7}\in\mathbb{N}$, de unde concluzia.