Problema 1. Pentru fiecare număr natural nenul n, considerăm suma:

$$S_n = \left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{3}\right].$$

a) Demonstraţi că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$,

$$\left[\frac{n+1}{3}\right] + \left[\frac{n+2}{3}\right] + \left[\frac{n+3}{3}\right] = n+1.$$

b) Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $S_n = 805$.

c) Determinaţi valorile lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $S_n = \dfrac{(n-2)(n+1)}{6}$.

* * *

Soluţie. a) Fie $n = 3k + r$, cu $k \in \mathbb{N}$ şi $r \in \{0, 1, 2\}$. Obţinem:

$$E_n = E_{3k+r} = \left[\frac{n+1}{3}\right] + \left[\frac{n+2}{3}\right] + \left[\frac{n+3}{3}\right] = 3k + 1 + F_r,$$

unde $F_r = \left[\dfrac{r+1}{3}\right] + \left[\dfrac{r+2}{3}\right] + \left[\dfrac{r+3}{3}\right]$. Deoarece $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ şi $F_2 = 2$, obţinem $E_{3k} = 3k + 1$, $E_{3k+1} = 3k + 2$ şi $E_{3k+2} = 3k + 3$, deci $E_n = n + 1$.

b) Fie $S_0 = 0$. Avem $S_{n+3} = S_n + \left[\dfrac{n+1}{3}\right] + \left[\dfrac{n+2}{3}\right] + \left[\dfrac{n+3}{3}\right]$, şi din punctul a) deducem:

$$S_{n+3} = S_n + n + 1, \quad \text{pentru orice} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Dând valori lui n în (1) şi adunând relaţiile membru cu membru obţinem $S_{3k} = \dfrac{k(3k-1)}{2}$, $S_{3k+1} = \dfrac{k(3k+1)}{2}$ şi $S_{3k+2} = \dfrac{3k(k+1)}{2}$, cu $k \in \mathbb{N}$. (2) Ecuaţiile $S_{3k} = 805$ şi $S_{3k+2} = 805$ nu au soluţii întregi, iar din $S_{3k+1} = 805$ deducem $k = 23$ şi $n = 70$.

c) Folosim relaţiile (2). Fie $k \in \mathbb{N}$. Dacă $n = 3k$ sau $n = 3k+1$, atunci $S_n = \dfrac{n(n-1)}{6}$, iar dacă $n = 3k + 2$, atunci $S_n = \dfrac{(n-2)(n+1)}{6}$. Soluţiile sunt numerele $n = 3k + 2$, cu $k \in \mathbb{N}$.