Problema 3. Dacă r este un număr raţional dat, aflaţi toate numerele întregi z pentru care

$$2^z + 2 = r^2.$$

Olimpiadă Elveţia, 2011

Soluţie:
Dacă $z \geq 0$, membrul stâng este un număr natural, deci trebuie ca r să fie un număr întreg.
• Dacă $z \geq 2$, membrul stâng este par dar nu este divizibil cu 4, deci nu este pătrat perfect. Prin urmare nu putem avea soluţie $z \geq 2$.
• Dacă $z = 1$, obţinem $r^2 = 4$, deci $z = 1$ este soluţie dacă $r \in \{-2, 2\}$.
• Dacă $z = 0$ obţinem $r^2 = 3$, imposibil cu r raţional.
• Dacă $z < 0$ este par, $z = -2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, ajungem la $\dfrac{1}{2^{2k}} + 2 = r^2$, adică la $\dfrac{1 + 2^{2k+1}}{2^{2k}} = r^2$. Trebuie aşadar ca $1 + 2^{2k+1}$ să fie pătrat perfect. Dacă $1 + 2^{2k+1} = m^2$, atunci $2^{2k+1} = (m-1)(m+1)$. Deoarece $(m-1, m+1) \in \{1, 2\}$, deducem că $m - 1 = 2$, deci $k = 1$. Aşadar $z = -2$ este soluţie a ecuaţiei dacă $r \in \left\{-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right\}$.
• Dacă $z < 0$ este impar, $z = -2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, ajungem la $\dfrac{1 + 2^{2k+2}}{2^{2k+1}} = r^2$, adică la $\dfrac{2 + 2^{2k+3}}{2^{2k+2}} = r^2$. Trebuie aşadar ca $2 + 2^{2k+3}$ să fie pătrat perfect, ceea ce nu se poate deoarece $2 + 2^{2k+3}$ dă restul 2 la împărţirea cu 4.

În concluzie:
• dacă $r \in \{-2, 2\}$ atunci ecuaţia are soluţia unică $z = 1$;
• dacă $r \in \left\{-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right\}$ atunci ecuaţia are soluţia unică $z = -2$;
• în toate celelalte cazuri ecuaţia nu are soluţii.