Etapa finală, Ediția a XIII-a, 2022

Clasa a VII-a

Problema 1. Determinaţi partea întreagă a numărului

$$N=\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2022^2}+\frac{1}{2023^2}}.$$

* * *

Soluţie:

Observăm că pentru orice număr natural nenul k are loc identitatea $1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}=$ $1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}-2\cdot\frac{1}{k(k+1)}+2\cdot\frac{1}{k}-2\cdot\frac{1}{k+1}==\left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)^2$. **4p**

Aplicând succesiv identitatea de mai sus pentru $k\in\{2,3,\ldots,2022\}$, apoi adunând, obţinem $N=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+1+\frac{1}{2022}-\frac{1}{2023}==2021+\frac{1}{2}-\frac{1}{2023}$. **2p**

Partea întreagă a numărului N este 2021. **1p**