Problema 1. Câte cifre are numărul $C = 2^{2018} \cdot 5^{1918}$?

* * *

Soluţie Putem scrie

$$C = 2^{100} \cdot 2^{1918} \cdot 5^{1918} = 2^{100} \cdot (2 \cdot 5)^{1918} = 2^{100} \cdot 10^{1918}.$$

Numărul se va termina cu 1918 cifre egale cu 0. Trebuie văzut câte cifre are 2^{100}.

Avem $2^{100} = 2^{10 \cdot 10} = (2^{10})^{10} = 1024^{10}$. Cum $1000^{10} < 1024^{10}$ avem $10^{30} < 2^{100}$.

Vom arăta că $2^{100} < 10^{31}$.

Această relaţie este echivaletă cu $2^{100} < 2^{31} \cdot 5^{31}$ sau $2^{69} < 5^{31}$.

Avem $2^{69} = 2^9 \cdot 2^{60}$ şi $5^{31} = 5^4 \cdot 5^{27}$. Cum $2^9 < 5^4$ vom arăta că $2^{60} < 5^{27}$.

Putem scrie $2^{60} = (2^{20})^3$ şi $5^{27} = (5^9)^3$, prin urmare trebuie arătat că $2^{20} < 5^9$. Acum $2^{20} = 2^2 \cdot 2^{18} = 4 \cdot 2^{18}$ şi $5^9 = 5 \cdot 5^8$. Cum $4 < 5$ avem de arătat că $2^{18} < 5^8$.

Avem $2^{18} = (2^9)^2 = 512^2$ şi $5^8 = (5^4)^2 = 625^2$, prin urmare $2^{18} < 5^9$.

În concluzie $10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$ ceea ce înseamnă că numărul 2^{100} are 31 de cifre.

Cum la 2^{100} se adaugă 1918 cifre egale cu 0, numărul $2^{2018} \cdot 5^{1918}$ va avea 1949 de cifre $(31 + 1918)$.