Problema 2
Etapa 5
Clasa a IX-a

Problema 2. Fie ABC un triunghi oarecare. Fie A_b şi A_c proiecţiile vârfului A pe bisectoarele exterioare ale unghiurilor $\hat{B}$, respectiv $\hat{C}$, B_a şi B_c proiecţiile vârfului B pe bisectoarele exterioare ale unghiurilor $\hat{A}$, respectiv $\hat{C}$, iar C_a şi C_b proiecţiile vârfului C pe bisectoarele exterioare ale unghiurilor $\hat{A}$, respectiv $\hat{B}$. Demonstraţi că punctele A_b, A_c, B_a, B_c, C_a şi C_b sunt conciclice.

Ip

ΔABC

$(AD = \text{bis. } B\hat{A}C,\ D \in BC$

$(BE = \text{bis. } A\hat{B}C,\ E \in AC$

$(CF = \text{bis. } A\hat{C}B,\ F \in AB$

$A_bC_b = \text{bis. ext. } A\hat{B}C \Leftrightarrow A_bC_b \perp BE,\ AA_b \perp A_bC_b,\ CC_b \perp A_bC_b$

$B_aC_a = \text{bis. ext. } B\hat{A}C \Leftrightarrow B_aC_a \perp AD,\ BB_a \perp B_aC_a,\ CC_a \perp B_aC_a$

$A_cB_c = \text{bis. ext. } A\hat{B}C \Leftrightarrow A_cB_c \perp CF,\ AA_c \perp A_cB_c,\ BB_c \perp A_cB_c$

Concl

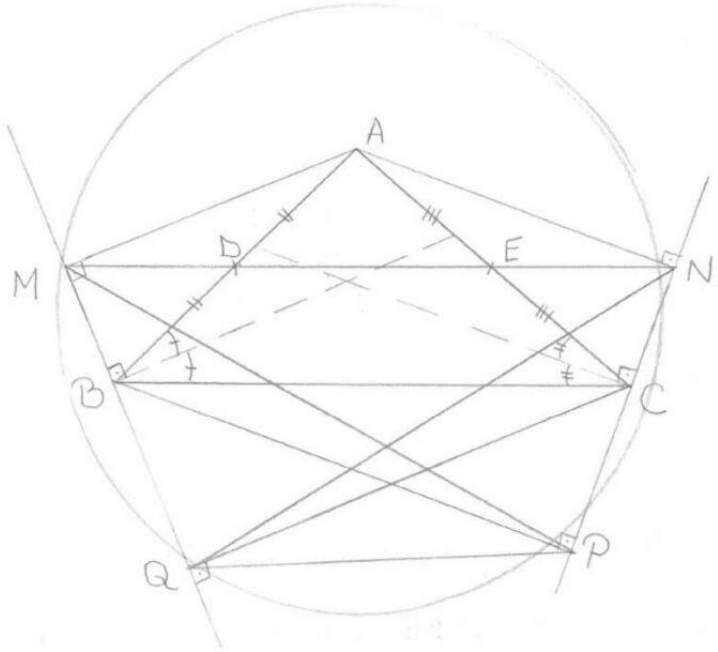
$A_b, A_c, B_a, B_c, C_a, C_b$ conciclice

Dem

Înainte de a trece la problema propriu-zisă, vom enunța și demonstra o lemă pe care o vom folosi în rezolvarea problemei date.

Lemă:

În ΔABC neisoscel, unde M și Q sunt proiecțiile punctelor A și C pe bisectoarea exterioară a lui $\sphericalangle ABC$, iar N și P proiecțiile lui A și B pe bisectoarea exterioară a lui $\sphericalangle ACB$, punctele M, N, P și Q sunt conciclice.



$m(B\hat{Q}C) = m(B\hat{P}C) = 90^\circ \Rightarrow$ patrulaterul BQPC este inscriptibil

$\Rightarrow m(C\hat{Q}P) = m(C\hat{B}P) = 90^\circ - (m(A\hat{B}C) + m(B\hat{A}C)) : 2.$

Fie D = mij [AB] și E = mij [AC]. Demonstrăm că punctele M, D, E și N sunt coliniare.

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow DE \text{ este linie mijlocie în } \triangle ABC \Rightarrow DE \parallel BC \\ DB \text{ secantă} \end{array}\right\} \Rightarrow M\hat{D}B \equiv D\hat{B}C \text{ (alt. int.)} \Rightarrow MD \parallel BC$

Pentru $DM \parallel BC$, din Axioma lui Euclid avem M, D, E coliniare (*)

$\left.\begin{array}{l} DE \text{ este linie mijlocie în } \triangle ABC \Rightarrow DE \parallel BC \\ EC \text{ secantă} \end{array}\right\} \Rightarrow N\hat{E}C \equiv E\hat{C}B \text{ (alt. int.)} \Rightarrow NE \parallel BC$

Pentru $NE \parallel BC$, din Axioma lui Euclid avem N, E, D coliniare (**)

Din relațiile (*) și (**), avem M, D, E și N coliniare

$\Rightarrow M\hat{N}P \equiv M\hat{N}C \Rightarrow m(M\hat{N}P) = m(M\hat{N}C) = \frac{m(A\hat{B}C) + m(B\hat{A}C)}{2}$

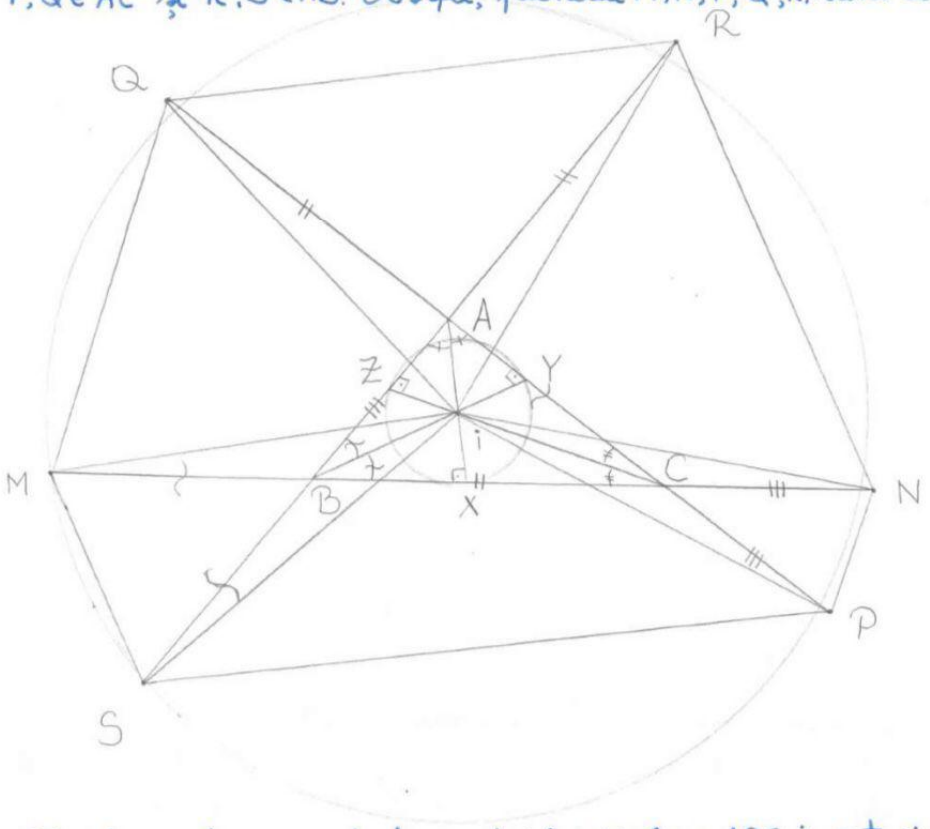
$\Rightarrow m(M\hat{Q}P) + m(M\hat{N}P) = 180^\circ - \frac{m(\hat{A}) + m(\hat{B})}{2} + \frac{m(\hat{A}) + m(\hat{B})}{2} = 180^\circ$

$\Rightarrow$ punctele M, N, P și Q sunt conciclice, deoarece patrulaterul MNPQ e inscriptibil

Astfel am demonstrat prima lemă.
În continuare, demonstrăm o a doua lemă.

Lemă:

În $\triangle ABC$ oarecare, pe dreptele sale suport, fie M, N, P, Q, R, S astfel încât $MB = BS = AC$, $CP = CN = AB$ și $AR = AQ = BC$. Punctele $M, N \in BC$, $P, Q \in AC$ și $R, S \in AB$. Astfel, punctele M, N, P, Q, R, S sunt conciclice.



Vom demonstra că centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, i, este și centrul cercului circumscris hexagonului $PNRQMS$ (pe desen eroarea de conciclitate e cauzată de precizia instrumentelor folosite).

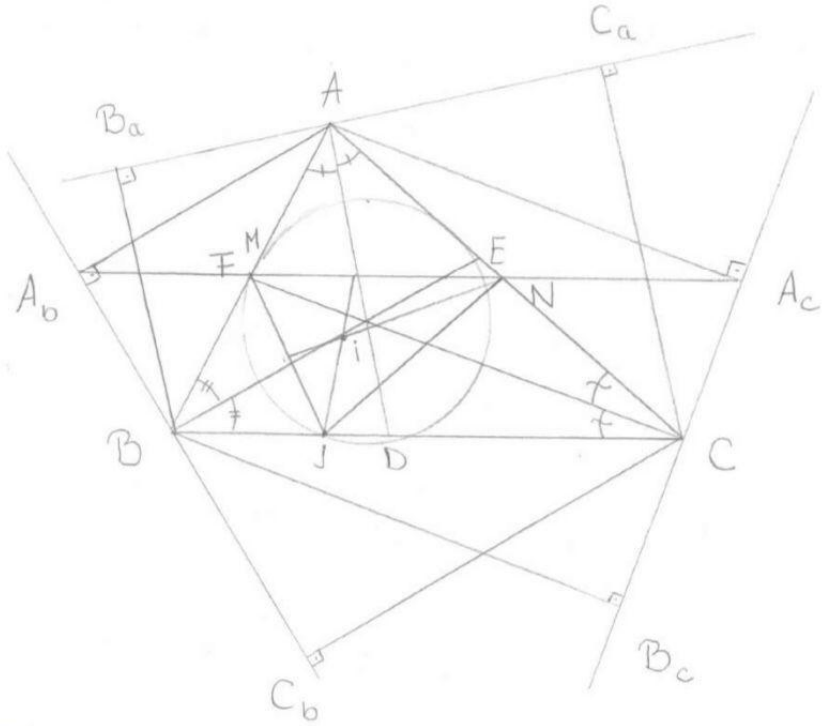
Fie X, Y și Z punctele de tangență ale cercului înscris în $\triangle ABC$ cu laturile sale. Astfel, $iX \perp BC$, $iY \perp AC$, $iZ \perp AB$.

Avem că $\triangle iXM \equiv \triangle iZS \equiv \triangle iYP \equiv \triangle iXN \equiv \triangle iYQ$ (C.C.), deoarece $XM = XN = YP = YQ = ZR = ZS = x$, iar $iX = iY = iZ = r$. ($x = P_{\triangle ABC} : 2$).

$\Rightarrow iM = iN = iP = iQ = iR = iS = R$

$\Rightarrow i$ este centrul cercului determinat de punctele M, S, P, N, R, Q; deci, am demonstrat că cele 6 puncte sunt conciclice.

Revenind la problema noastră, vom reprezenta grafic cele problemei.



Folosindu-ne de soluția primei leme pentru punctele A_b, M, N și A_c, vom demonstra că centrul cercului înscris în $\triangle MNJ$, i, este centrul cercului circumscris hexagonului $A_b C_b B_c A_c C_a B_a$, unde M, N sunt intersecțiile lui $A_b A_c$ cu AB și AC, iar J e celălalt punct de tangență al cercului înscris în $\triangle ABC$ cu laturile sale.

Aplicăm cea de-a doua lemă pt $\triangle MNJ$ median și obținem că punctele A_b, A_c, B_a, B_c, C_a, C_b sunt conciclice.