Etapa 2, Problema 3

Fie M un punct în planul paralelogramului $ABCD$. Demonstrați că

$$\left|MA\cdot MC-MB\cdot MD\right|\leq AB\cdot BC\leq MA\cdot MC+MB\cdot MD.$$

Dan Ştefan Marinescu

Soluție.

Fie z_1,z_2,z_3,z_4,z afixele punctelor A,B,C,D respectiv M. Cum $ABCD$ este paralelogram, rezultă că $z_1+z_3=z_2+z_4$.

Prin calcul direct se arată că

$$(z_1-z_2)(z_2-z_3)=(z-z_2)(z-z_4)-(z-z_1)(z-z_3).$$

Trecem la modul în această identitate și, ținând seama de proprietatea modulului

$$\left||w_1|-|w_2|\right|\leq|w_1-w_2|\leq|w_1|+|w_2|,\forall w_1,w_2\in\mathbb{C},$$

obținem cerința problemei.