Camelia Oprea, clasa a X-a

Pe un cerc se consideră $2n$ puncte distincte, unde $n \in N^*$. În câte moduri putem construi n coarde ale cercului, care nu se intersectează, prin unirea două câte două a celor $2n$ puncte?

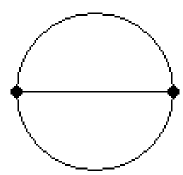
* * *

Soluţia 1

Pentru a uşura identificarea numărului cerut, privim problema din altă perspectivă. Numărul de posibilităţi de a construi n coarde, care nu se intersectează, prin unirea două câte două a $2n$ puncte distincte de pe cerc este acelaşi cu numărul de posibilităţi ca $2n$ persoane, aşezate în jurul unei mese rotunde, să îsi dea mâna simultan două câte două, formându-se n strângeri de mână, astfel încât să nu îşi încrucişeze nimeni braţele peste masă.

Privind astfel problema, demonstrăm prin inducţie că numărul căutat este numărul lui Catalan: $C_n = \dfrac{1}{n+1} C_{2n}^n$, $n \in N^*$.

I. Verificăm propoziţia pentru $n = 1$:

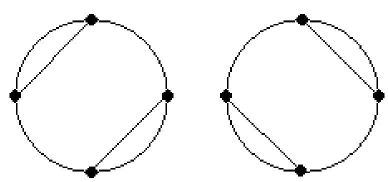


Există un singur mod ca două persoane să îşi dea mâna.

De asemenea $C_1 = \dfrac{1}{2} C_2^1 = 1$, deci pentru $n = 1$ verifică.

Verificăm propoziţia şi pentru $n = 2$:

Cele patru persoane din jurul mesei îşi pot da mâna în două feluri :



De asemenea $C_2 = \dfrac{1}{3} C_4^2 = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = \dfrac{3 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 2$, deci pentru $n = 2$ verifică.

II. Arătăm că dacă propoziţia e adevărată pentru $\forall k = \overline{1, n-1}$ atunci va fi adevărată şi pentru $k = n$.

Fie două persoane, care dându-şi mîna le separă pe celelalte în două grupuri cu număr par de persoane (nord şi sud). Există următoarele posibilităţi: să rămână nicio pereche în nord şi $n-1$ perechi în sud, o pereche în nord şi $n-2$ perechi în sud, ... , $n-1$ perechi în nord şi nicio pereche în sud.

Să presupunem că la nord faţă de cele două persoane considerate sunt k perechi şi atunci în sud vor fi $n-k-1$ perechi. Aceste două grupe vor forma strângeri de mână independent una de alta, deci conform ipotezei inducţiei în cea din nord vom avea C_k modalităţi, iar în cea din sud C_{n-k-1} modalităţi, deci pentru acest caz în total $C_k \cdot C_{n-k-1}$ modalităţi de strângeri de mână.

Însumând obţinem că numărul total de posibilităţi este

$$C_0C_{n-1}+C_1C_{n-2}+\ldots+C_{n-2}C_1+C_{n-1}C_0 \qquad (1)$$

Ştim că $C_0=1$. Ne folosim acum de următoarea proprietate (Propoziţia 2.6, pag.2 din materialul de pregătire de la etapa 5, clasa a X-a) :

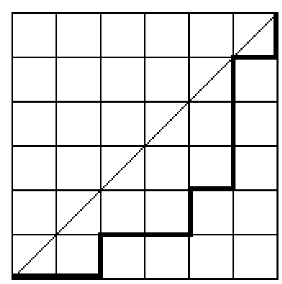
$$C_n=C_0C_{n-1}+C_1C_{n-2}+\ldots+C_{n-2}C_1+C_{n-1}C_0\ ,\quad \forall n\in\mathbf{N}^* \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) obţinem că propoziţia este adevărată pentru $k=n$.

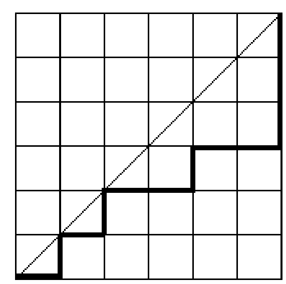
Conform principiului inducţiei matematice, numărul de modalităţi ca $2n$ persoane din jurul unei mese rotunde, să îşi dea mâna simultan, două câte două, formându-se n strângeri de mână, astfel încât să nu îşi încrucişeze nimeni braţele peste masă, acelaşi cu numărul de posibilităţi de a construi n coarde care nu se intersectează unind două câte două $2n$ puncte aflate pe un cerc este aşadar numărul lui Catalan $C_n=\dfrac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$, $n\in N^*$, ceea ce încheie demonstraţia.

Soluţia 2

Să considerăm întâi o altă problemă: să calculăm numărul C_n de drumuri laticiale crescătoare de la $(0, 0)$ la (n, n), $n\in N^*$, care nu trec deasupra diagonalei principale. Un drum este crescător dacă la fiecare pas deplasarea se face sau la dreapta (D) sau în sus (S).



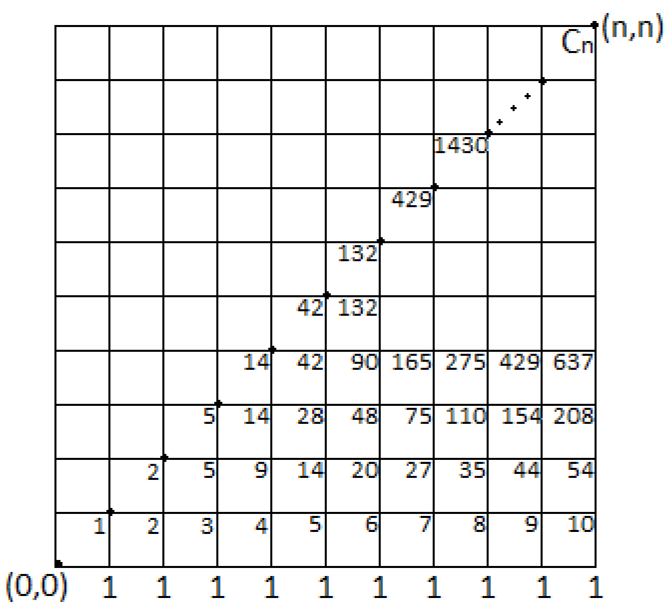
DDSDDSDSSSDS



DSDSDDSDDSSS

Drumuri posibile ar fi ca cele din figura alăturată, având sensul de deplasare indicat printr-un cuvânt de $2n$ litere, în care D apare de n ori şi S apare de n ori. Este evident că orice drum corect trebuie să înceapă cu o deplasare la dreapta şi să se finalizeze cu o deplasare în sus, adică cuvântul ataşat începe cu D şi se sfârşeşte cu S. În plus, în fiecare moment al deplasării, numărul paşilor făcuţi spre dreapta trebuie să fie mai mare sau egal decât cel al paşilor făcuţi în sus, condiţie ce se impune pentru a nu trece de diagonala principală.

Spunem că un cuvânt are proprietatea (p), dacă este format din n litere D şi n litere S, astfel încât să înceapă cu D şi să se termine cu S, iar pentru orice $k=1, 2, \ldots, 2n$, în primele k litere ale cuvântului numărul apariţiilor lui D este cel puţin egal cu numărul apariţiilor lui S.



Am arătat că oricărui drum valid îi corespunde un cuvânt cu proprietatea (p). Invers, se constată că oricărui cuvânt cu proprietatea (p) îi corespunde un drum valid. Prin urmare, numărul drumurilor valide este egal cu numărul cuvintelor cu proprietatea (p).

Calculul numerelor C_n se poate face cu uşurinţă prin însumări repetate, ca în tabelul alăturat.

Deoarece numărul de paşi care trebuie făcuţi pentru a ajunge din $(0, 0)$ în (n, n) este $2n$, din care n spre dreapta, iar n în sus, deducem că există C_{2n}^{n} drumuri posibile, dintre care însă o parte sunt invalide, trecând deasupra diagonalei principale.

Analizând în tabelul următor raportul dintre numărul tuturor drumurilor posibile de la

n	1	2	3	4	5	6	7	8	…
C_n	1	2	5	14	42	132	429	1430	
C_{2n}^{n}	2	6	20	70	252	924	3432	12870	
C_{2n}^{n}/C_n	2	3	4	5	6	7	8	9	

$(0, 0)$ la (n, n) şi numărul drumurilor valide, constatăm că $\frac{C_{2n}^{n}}{C_n} = n+1$, de unde intuim formula

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}, \quad n \in N^*.$$

Analizăm în continuare câte drumuri invalide sunt. Orice drum invalid are un moment în care numărul de paşi făcuţi în sus este cu 1 mai mare decât numărul de paşi făcuţi spre dreapta. Să presupunem că acesta este pasul $2k+1$; atunci avem k paşi făcuţi spre dreapta şi $k+1$ paşi făcuţi în sus. Mai trebuie să facem $n-k$ paşi spre dreapta şi $n-k-1$ în sus. La drumul rămas schimbăm sensurile între ele, ceea ce înseamnă că vom mai face $n-k$ paşi în sus şi $n-k-1$ spre dreapta. Fiind în total $n+1$ paşi în sus, am depăşit ordonata n. Această transformare arată că există o bijecţie între numărul drumurilor invalide şi cel al drumurilor cu $n+1$ paşi în sus, deci vor fi $C_{2n}^{n+1} = C_{2n}^{n-1}$ drumuri invalide. Ca urmare scăzând din numărul drumurilor posibile pe cel al drumurilor invalide, aflăm numărul drumurilor valide:

$$C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n+1} = C_{2n}^{n} - \frac{n}{n+1} C_{2n}^{n} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n} = C_n, \quad n \in N^*,$$

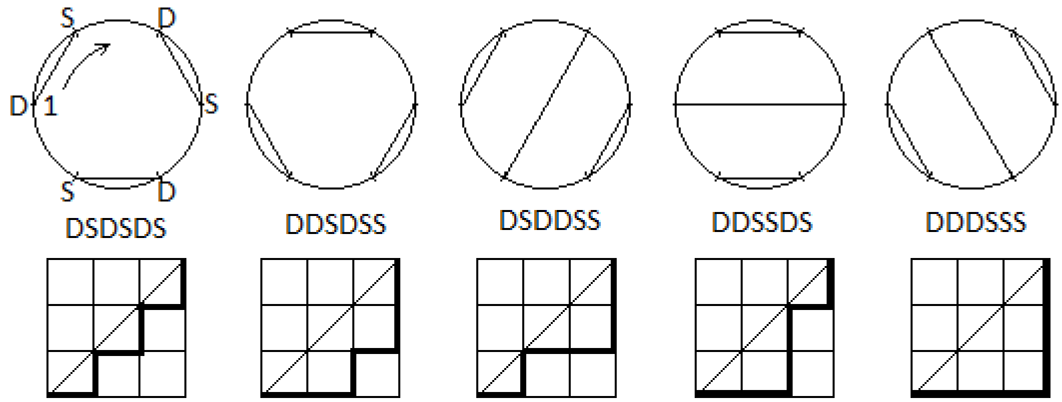
care sunt numerele lui Catalan.

Să revenim la problema dată. Desenăm coardele de tipul cerut prin unirea două câte două a celor $2n$ puncte de pe cerc, obţinând n coarde care nu se intersectează,. Mergem în jurul cercului, pornind dintr-un punct oarecare ales, într-unul din sensuri. Atunci când întâlnim o coardă pentru prima dată, îi etichetăm capătul cu D. Atunci când o întâlnim a doua oară etichetăm cu S. Obţinem astfel cuvinte cu proprietatea (p). Constatăm că oricărui cuvânt cu proprietatea (p) îi corespunde în mod univoc un sistem de n coarde cu proprietatea cerută. (În parcurgerea cuvântului de la stânga la dreapta, asociem fiecărei litere S ultima literă D pentru a forma perechea de puncte ce determină o coardă.) Am construit astfel o bijecţie între numărul de moduri în care putem construi n coarde valide şi numărul drumurilor valide de la $(0, 0)$ la (n, n), $n \in N^*$. Ca urmare, cele două probleme au acelaşi rezultat:

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}, \quad n \in N^*$$

care sunt numerele lui Catalan.

Exemplu $n = 3$:



Soluţia 3

Matematicianul belgian E. C. Catalan a demonstrat că numărul posibilităţilor de a plasa corect $2n$ paranteze (dintre care n deschise şi n închise, formând n perechi valide), este egal cu

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}, \quad n \in N^*,$$

definind astfel numerele ce îi poartă numele.

Problema noastră este similară. Considerăm o bijecţie:

Desenăm coardele de tipul cerut. Mergem în jurul cercului, pornind dintr-un punct oarecare ales, într-unul din sensuri. Atunci când întâlnim o coardă pentru prima dată, îi etichetăm capătul cu „ (”. Atunci când o întâlnim a doua oară etichetăm cu „) ”. Obţinem astfel un şir de n perechi de paranteze corect plasate (o pereche de paranteze corespunde unei coarde). Deci, numărul de moduri în care putem construi n coarde ale cercului, care nu se intersectează, prin unirea două câte două a celor $2n$ puncte este egal cu numărul de posibilităţi de a plasa corect $2n$ paranteze, adică

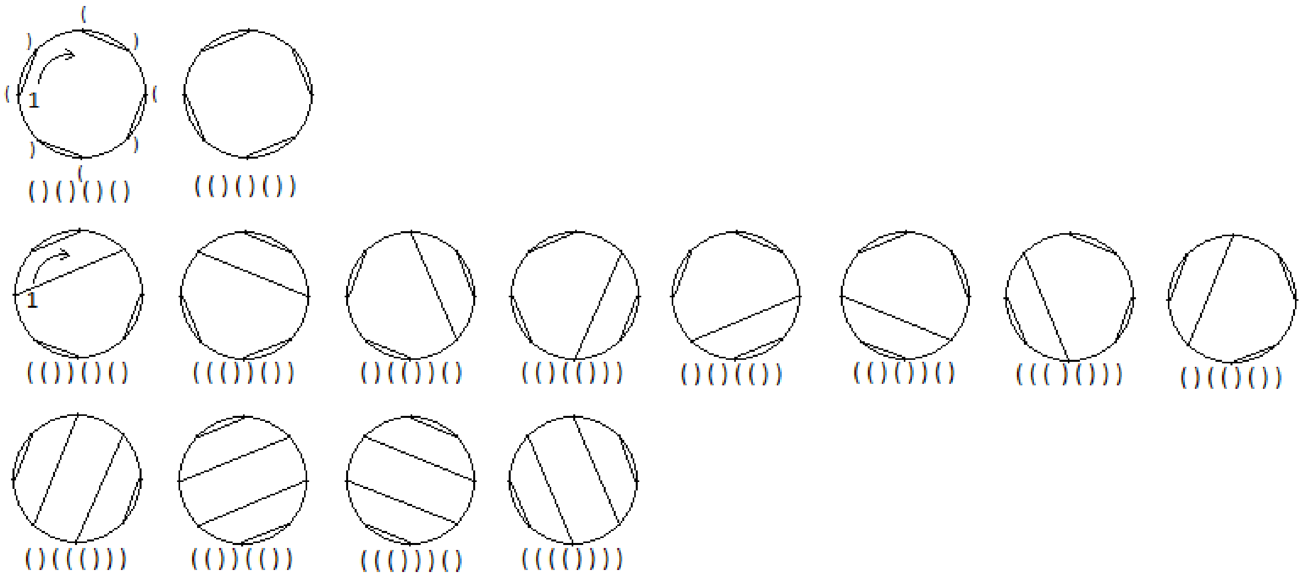
$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}, \quad n \in N^*.$$

Soluţia 4

Considerăm că nu am cunoaşte numerele lui Catalan, şi le deducem noi.

Desenăm coardele de tipul cerut şi le etichetăm ca mai sus. Este evident că oricare posibilitate corectă începe cu „ (”, se sfârşeşte cu „) ” şi numărul parantezelor deschise este în fiecare moment mai mare sau egal cu cel al parantezelor închise.

Exemplu $n = 4$:



Numărul total de moduri în care putem construi n coarde ale cercului, prin unirea două câte două a celor $2n$ puncte este evident C_{2n}^{n} şi este egal cu numărul total de moduri în care putem plasa cele n paranteze deschise în cele $2n$ poziţii. Din acestea trebuie să eliminăm cazurile în care există coarde care se intersectează, respectiv cazurile în care ordinea parantezelor nu este corectă.

Analizăm în continuare câte astfel de cazuri neconvenabile sunt. Este mai uşor să urmărim şirurile de paranteze. În notarea oricărei variante invalide există un moment în care numărul de paranteze închise este cu 1 mai mare decât al celor deschise. Să presupunem că aceasta se întâmplă după etichetarea a $2k+1$ puncte: atunci avem k paranteze deschise şi $k+1$ paranteze închise. Mai trebuie să deschidem $n-k$ paranteze şi să închidem $n-k-1$. La etichetarea care a mai rămas de făcut, să schimbăm etichetele între ele, ceea ce arată că vom mai pune $n-k$ paranteze închise şi $n-k-1$ paranteze deschise. Fiind în total un număr de $n+1$ paranteze închise, avem un caz neconvenabil ($\forall k \in \{0, 1, ..., n-1\}$). Această schimbare arată că există o bijecţie între numărul cazurilor neconvenabile şi cel al etichetărilor cu $n+1$ paranteze închise, deci vom avea $C_{2n}^{n+1} = C_{2n}^{n-1}$ cazuri nefavorabile.

Scăzând din cazurile posibile pe cele nefavorabile, rămân

$$C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n+1} = C_{2n}^{n} - \frac{n}{n+1} C_{2n}^{n} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n} = C_n, \quad n \in N^*$$

cazuri favorabile (şi pentru paranteze, şi pentru coarde), adică tocmai numerele lui Catalan.

Observaţie

La realizarea corespondenţei între un şir valid de paranteze şi coardele cercului, asociem unei paranteze închise ultima paranteză deschisă întâlnită înaintea ei, pentru a determina perechea de puncte ce formează coarda.